

حلقه‌های نیوتن ← حرکت‌های دایره‌ای
 قانون کپلر ← مدارهای بیضی

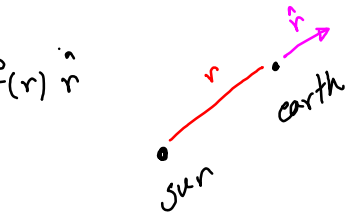
$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{z}$$

قانون کپلر: شعاع در زمانهای مساوی، مسافت‌های مساوی را جابجا می‌کند.

نیروهای گرانشی: $\vec{F}(r) = f(r) \hat{r}$

این - اندازه حرکت زاویه‌ای پایسته است.

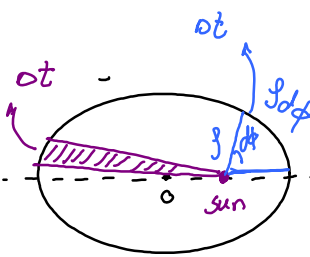
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \vec{v}$$



$$\rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{v} \times m \vec{v} + \vec{r} \times f(r) \hat{r} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = 0 \Rightarrow L = \text{const.} \rightarrow \text{هم‌حساب و هم‌اندازه‌ها ثابت می‌مانند}$$

$$L = L \hat{z} : \text{حرکت در صفحه } x-y \text{ محدود است} \rightarrow \hat{z} \cdot \vec{L} = L$$



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \hat{r} \times m (\dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi}) = m r^2 \dot{\phi} \hat{z}$$

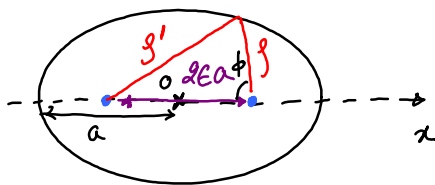
$$\hat{z} \cdot \vec{L} = L = m r^2 \dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{L}{m r^2}$$

مساحت ناحیه مسیری: $A = \frac{1}{2} \int r^2 d\phi = \frac{1}{2} \int r^2 \frac{d\phi}{dt} dt = \frac{1}{2} \int \frac{L}{m} dt$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} L \frac{t}{m}$$

$$A = \frac{1}{2} L \frac{t}{m} \Rightarrow \frac{dt_1}{dt_2} = \frac{A_1}{A_2}$$

$$\text{اگر } dt_1 = dt_2 \Rightarrow A_1 = A_2$$



$$g + g' = 2a \quad (1)$$

برای آوردن مدار بیضی ← حرکت‌های استوانه‌ای
 دایره " دایره بیضی"

نیم دایره $\rightarrow \epsilon = 0$, $\epsilon < 1$, $\epsilon \geq 1$ فریبج از مرکز: ϵ ; فاصله دو کانون بیضی $= 2\epsilon a$

برای مثلث قرمز: $g'^2 = g^2 + (2\epsilon a)^2 + 2(2\epsilon a)g \cos \phi \xrightarrow{(1)} (2a - g)^2 = g^2 + 4a^2 \epsilon^2 + 4a\epsilon g \cos \phi$

$$g' = 2a - g$$

(2)

$$\Rightarrow 4a^2 + g^2 - 4ag = g^2 + 4a^2 \epsilon^2 + 4a\epsilon g \cos \phi \Rightarrow \underbrace{a(1 - \epsilon^2)}_P = g(1 + \epsilon \cos \phi)$$

محاسبه مدار
 کپلر از حرکت‌های استوانه‌ای

$$j^2 = x^2 + y^2 = (p - \epsilon x)^2 = p^2 + \epsilon^2 x^2 - 2\epsilon xp$$

معادله منصفه در دستگاه دکارتی:

$$(1) : p = j + \epsilon \cos \phi \Rightarrow j = p - \epsilon x$$

$$\left(x + \frac{pe}{1-\epsilon^2}\right)^2 - \frac{p^2 e^2}{(1-\epsilon^2)^2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^2 - \epsilon^2 x^2}_{(1-\epsilon^2)x^2} + 2\epsilon xp + j^2 = p^2 \Rightarrow (1-\epsilon^2) \left\{ x^2 + \frac{2\epsilon p}{1-\epsilon^2} x \right\} + j^2 = p^2$$

$$\Rightarrow (1-\epsilon^2) \left(x + \frac{pe}{1-\epsilon^2}\right)^2 + j^2 = p^2 + \frac{p^2 e^2}{1-\epsilon^2}$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$= p^2 \left\{ \frac{1-\epsilon^2 + \epsilon^2}{1-\epsilon^2} \right\} = \frac{p^2}{1-\epsilon^2}$$

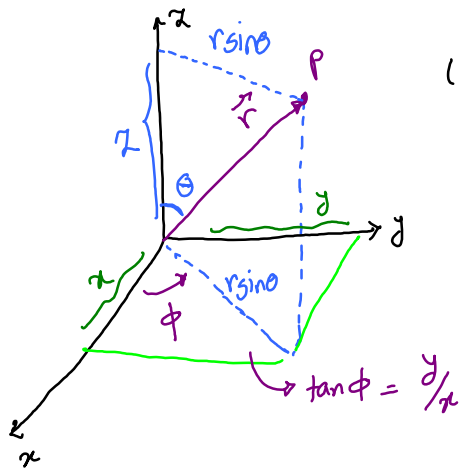
$$\Rightarrow \frac{1-\epsilon^2}{p^2} \frac{\left(x + \frac{pe}{1-\epsilon^2}\right)^2}{a^2} + \frac{j^2}{\frac{p^2}{(1-\epsilon^2)}} = 1$$

$$\rightarrow a = \frac{p}{1-\epsilon^2}, b = \frac{p}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$$

$$x_0 = \frac{pe}{1-\epsilon^2} = \epsilon a \quad \text{فاصله بین مرکز و کانون}$$

معادله منصفه به مرکز $x_0 = a\epsilon, y_0 = 0$

مختصات کروی



$$(q_1, q_2, q_3) \rightarrow (r, \theta, \phi)$$

$$0 \leq r < \infty$$

$$0 \leq \theta < \pi$$

$$0 \leq \phi < 2\pi$$

سطح مختصات کروی:

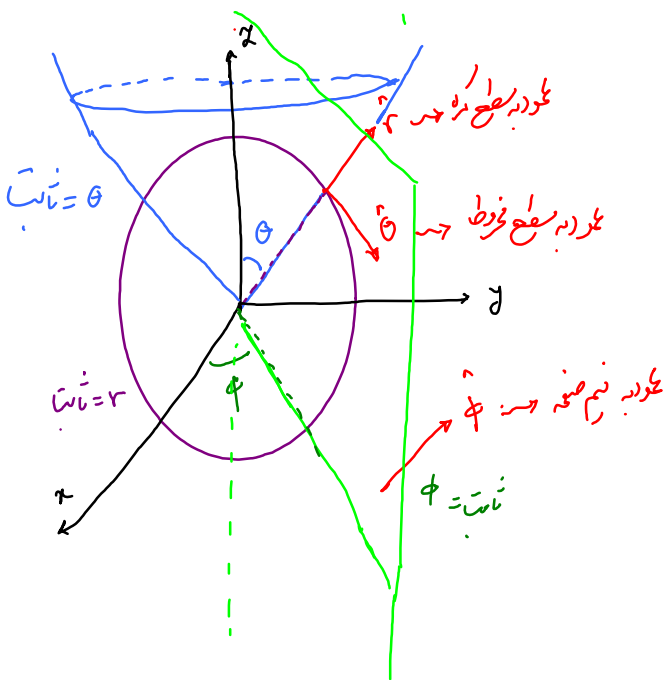
$$1- \text{ کره‌های هم مرکز حول مبدأ: } r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \text{ثابت}$$

$$2- \text{ مخروط‌های قائم حول محور } z \text{ با رأس واقع در مبدأ}$$

$$\cos \theta = z/r \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \text{ثابت}$$

$$3- \text{ نیم صفحه‌ای که به محور } z \text{ محدود شده اند.}$$

$$\tan \phi = y/x \Rightarrow \phi = \tan^{-1} y/x = \text{ثابت}$$



$$\begin{aligned}\hat{r} \times \hat{\theta} &= \hat{\phi} & \hat{\theta} \times \hat{\phi} &= \hat{r} & \hat{\phi} \times \hat{r} &= \hat{\theta} \\ \hat{\theta} \times \hat{\phi} &= \hat{r} & \hat{\phi} \times \hat{r} &= \hat{\theta} & \hat{r} \times \hat{\theta} &= \hat{\phi}\end{aligned}$$

رابطه دکارتی به کروی:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

در بزرگترین (رابطه کروی به دکارتی):

پایه های متعامد

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial r} &= \sin \theta \cos \phi & \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \theta \sin \phi & \frac{\partial z}{\partial r} &= \cos \theta \\ x &= r \sin \theta \cos \phi & y &= r \sin \theta \sin \phi & z &= r \cos \theta \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} &= r \cos \theta \cos \phi & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r \cos \theta \sin \phi & \frac{\partial z}{\partial \theta} &= -r \sin \theta\end{aligned}$$

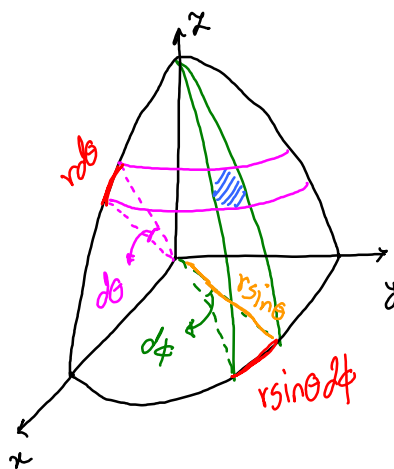
$$g_{ij} = \sum_l \frac{\partial x_l}{\partial q_i} \frac{\partial x_l}{\partial q_j} \quad g_{ij} = h_i^2 \delta_{ij} \quad \text{رابطه های متعامد}$$

$$g_{11} = h_1^2 = \sum_l \frac{\partial x_l}{\partial q_1} \frac{\partial x_l}{\partial q_1} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial r} \right)^2 = \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow h_1 = 1$$

$$g_{22} = h_2^2 = \sum_l \frac{\partial x_l}{\partial q_2} \frac{\partial x_l}{\partial q_2} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \theta} \right)^2 = r^2 \cos^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + r^2 \sin^2 \theta = r^2 \Rightarrow h_2 = r$$

$$g_{33} = h_3^2 = r^2 \sin^2 \theta \Rightarrow h_3 = r \sin \theta$$

$$d\vec{r} = \sum h_i dq_i \hat{q}_i \rightarrow d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$$

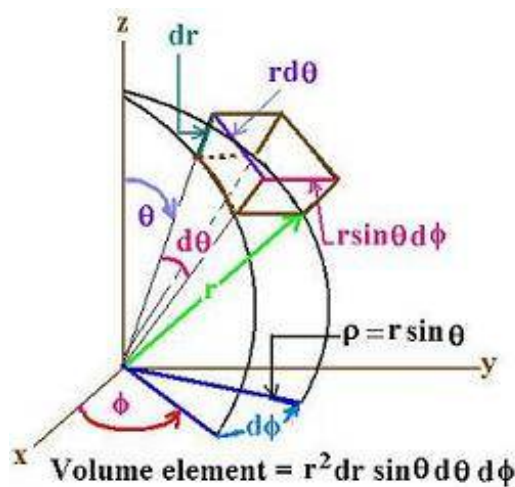


مساحت هائیکه در حفره است $r = \text{ثابت} \Rightarrow dA = d\Omega = (r d\theta)(r \sin\theta d\phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$

روی کلاه انفرال برسم: $dA_\theta = r^2 \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$

مساحت کلاه صوری زینت: $dA_\theta = 2\pi r^2 \sin\theta d\theta$

روی کلاه انفرال برسم: $A = 4\pi r^2$: سطح کلاه



زاویه فضای (انفرال): $d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \sin\theta d\theta d\phi$

$\int d\Omega = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi$

حجم ملوک کوچک: $dv = dr r d\theta r \sin\theta d\theta = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$

عملگرهای ریاضی

$\vec{\nabla} \psi = \hat{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (v_r r^2 \sin\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta r \sin\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (v_\phi r) \right]$

$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r \hat{\theta} & r \sin\theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ v_r & r v_\theta & r \sin\theta v_\phi \end{vmatrix}$

$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\sin\theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) \right]$

مثال: لاپلاس نیروی مرکزی $f(r)$ را بسازید $\leftarrow \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$

$\nabla^2 f(r) = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\sin\theta \frac{d}{dr} (r^2 \frac{df}{dr}) \right]$

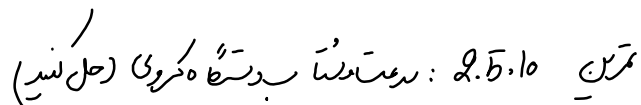
$$\vec{\nabla} \times f(r) \hat{r} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ f(r) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times f(r) \hat{r} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ f(r) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$



$$\hat{\theta} = \sin(\bar{\gamma}_2 - \theta) \cos \phi \hat{x} + \sin(\bar{\gamma}_2 - \theta) \sin \phi \hat{y} - \cos(\bar{\gamma}_2 - \theta) \hat{z}$$

$$\hat{\phi} = -\sin\phi \hat{x} + \cos\phi \hat{y}$$



$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} = -\sin \theta \sin \phi \hat{x} + \sin \theta \cos \phi \hat{y} = \sin \theta (-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}) = \sin \theta \hat{\phi}$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} = -\hat{r} \quad \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \phi} = \cos \theta \hat{\phi} \quad \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} = -\sin \theta \hat{r} - \cos \theta \hat{\theta} \quad \frac{\partial \hat{r}}{\partial r} = \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial r} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \theta} = 0$$

کتلہ مائٹری

میدانهای اسکالر: به هر نقطه وضا اندازه نسبت داده می شود. $\leftarrow$ کتاب تبدیل دستگاه مختصات محلی منبسط شود: $m' = m$

" برابری : " " " " " (اندازه و جهت نسبت داده می شود) " " " " " (از رابطه معادل تبعی می آید) : $A'_i = \sum a_{ij} A_j$
 " مانوری : به هر بردار در هونته فضای یک بردار دیگر نسبت داده می شود ← ؟
 کسینوسهای هاری

برای راحتی تبدیلات دستگاه مختصات به روش عملی است:

الف - $d\vec{r} \rightarrow d\vec{r} = \sum_i dx_i \hat{e}_i$ $\rightarrow dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \dots$

از دستگاه مبدأ بریم به دستگاه $\leftarrow dx'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} dx_j$:
 [کم] در رفته ایم. (تبدیل دستگاه مختصات)
 برابری در دو $A'^i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} A^j$
 Contravariant Vector

$\vec{\nabla} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{y} + \dots = \sum \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \hat{x}_i$, ϕ : اسکالر $\Rightarrow \phi(x'_1, y'_1, z'_1) = \phi(x, y, z)$
 تبدیل دستگاه $\downarrow$ (چون اسکالریه)

$(\vec{\nabla} \phi)_i = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \sum_j \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \Rightarrow B'_i = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} B_j$
 بزرگم ورد (Covariant vector)

در دستگاه دکارتی : $a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}$ پس برای هم ورد و با دوردا تعاقب وجود ندارد.

تلفظ متبه ۲

تأثیر با دوردا : $A'^i = \sum_k \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} A^k$

تأثیر هم ورد : $B'_{ij} = \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} B_{kl}$

تأثیر آمیخته : $C'^i_j = \sum_k \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} A^k_l$

اسکالرها $\leftarrow$ تأثیرهای رتبه صفر

برابرها $\leftarrow$ " " رتبه یک