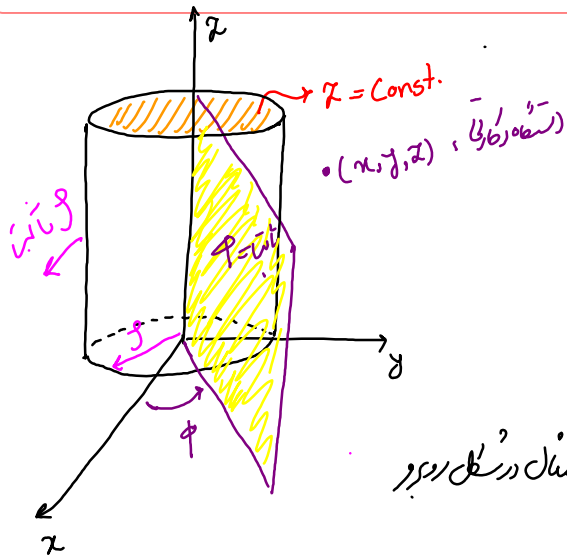


مطلب هفتم: مضمون دوم: آسانترین برداری در مختصات هندسه و دالتهای مختصات عام در فضای سه بعدی (رشته‌های متعامه)



مختصات عام در فضای سه بعدی

رشته‌های دکارتی: سه صفحه ثابت  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$  برهم عمودند.  
در حالت کلی: سه صفحه نرمالیت متعمد.  
آنها نرمال دو به دو هم عمود می‌شوند.

۳- صفحات مربوط به هر کدام از این سه صفحه نرمال با هم موازی نیستند و به عنوان مثال در شکل زیر درج شده است که صفحات ثابت  $x = \text{const}$  با هم موازی می‌شوند.

رشته‌های استوانه‌ای:  $(\rho, \phi, z) \xrightarrow{\text{مثال}} \text{رشته‌های مخروطی: } (q_1, q_2, q_3) \longrightarrow (x, y, z)$

$$x = x(q_i) \longrightarrow -\infty < x = \rho \cos \phi < +\infty$$

$$y = y(q_i) \longrightarrow -\infty < y = \rho \sin \phi < +\infty$$

$$z = z(q_i) \longrightarrow -\infty < z = z < +\infty$$

$$\text{رابطه‌های مختصات: } q_i = q_i(x, y, z) \longrightarrow \begin{aligned} 0 &\leq \rho = \sqrt{x^2 + y^2} < \infty \\ 0 &\leq \phi = \tan^{-1} y/x < 2\pi \end{aligned}$$

$$-\infty < z = z < +\infty$$

بردارهای با اندازه یک عمود بر صفحات ثابت  $q_i = \text{const}$  و جهت آن در جهت مختصات  $q_i$  است.

$$\hat{q}_i \cdot \hat{q}_j = \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = r_1 \hat{q}_1 + r_2 \hat{q}_2 + r_3 \hat{q}_3$$

$$x = x(q_1, q_2, q_3)$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad \text{این طول در رشته دکارتی:}$$

$$\hookrightarrow dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x}{\partial q_i} dq_i$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3} dq_3 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial y}{\partial q_i} dq_i, \quad dz = \dots$$

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x}{\partial q_i} dq_i \hat{i} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial y}{\partial q_i} dq_i \hat{j} + \dots \hat{k}$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} (\underbrace{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}_{\vec{r}}) dq_i = \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i \quad \text{نماینده dummy}$$

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}$$

\* نکته مهم: اندیس‌های فضای درجه‌های بار نوشته شوند،

بار دوم باید با اندیس متفاوت ظاهر شوند.

$$ds^2 = \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i \cdot \sum_j \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} dq_j = \sum_{i,j} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} dq_i dq_j$$

(metric) مرتب:  $g_{ij}$

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dq_i dq_j \quad \text{فضاهایی که عنصر طول در آنها به صورت معادله نوشته می‌شود، فضاهای ریاضی نام دارند.}$$

تفاوت مرتبه ۲

$$g_{ij} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = \frac{\partial x_1}{\partial q_i} \frac{\partial x_1}{\partial q_j} + \frac{\partial y_1}{\partial q_i} \frac{\partial y_1}{\partial q_j} + \frac{\partial z_1}{\partial q_i} \frac{\partial z_1}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial x_l}{\partial q_i} \frac{\partial x_l}{\partial q_j}$$

← سطح ثابت:  $q_i$  آنها درجه (در محاسبه) ← بردارهای درجه دو برهم می‌دهند: رشتگیهای متعام

$$\hat{q}_i \cdot \hat{q}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} = \delta_{ij} \Rightarrow \hat{q}_i \cdot \hat{q}_j = \delta_{ij}$$

$$*: ds^2 = g_{11} dq_1 dq_1 + g_{12} dq_1 dq_2 + \dots + g_{33} dq_3 dq_3 \quad \text{نمونه}$$

$$\text{در دستگاه دکارتی: } ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) \cdot (dx\hat{i} + \dots + \dots) \quad (=0)$$

$$ds^2 = g_{11}(dq_1)^2 + g_{22}(dq_2)^2 + g_{33}(dq_3)^2 \quad \text{در حالت کلی برای رشتگیهای متعام:}$$

$$ds^2 = d\vec{s} \cdot d\vec{s} \leftarrow ds^2 = (h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2 \quad *$$

مرتبه رشتگیهای متعام

$$g_{12} = g_{13} = \dots = g_{32} = 0, \quad g_{11} = h_1^2, \quad g_{22} = h_2^2, \quad g_{33} = h_3^2 \Rightarrow g_{ij} = h_i^2 \delta_{ij}$$

$$g_{ij} = h_i^2 \delta_{ij}$$

$h_i$ : ضریب مقیاس در حالتی که تابع مختصات  $q_i$  هستند:  $h_i = h_i(q_j)$

$$ds^2 = d\vec{s} \cdot d\vec{s} = \sum_i ds_i \hat{q}_i \cdot \sum_j ds_j \hat{q}_j = \sum_{i,j} ds_i ds_j \underbrace{\hat{q}_i \cdot \hat{q}_j}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^3 ds_i ds_i$$

\*:  $ds^2 = \sum (h_i)^2 (dq_i)^2 \Rightarrow$  **از رابطه بالا** **این صحت:  $ds_i = h_i dq_i$**

بر جایابی (تفاضلی):  $d\vec{r} = h_1 dq_1 \hat{q}_1 + h_2 dq_2 \hat{q}_2 + h_3 dq_3 \hat{q}_3 \Rightarrow$   **$d\vec{r} = \sum_{i=1}^3 h_i dq_i \hat{q}_i$**  \*\*

این سطح:  $d\sigma_{ij} = ds_i ds_j = h_i h_j dq_i dq_j$   
 $dA = dx dy$  **زاویه بین تبدیلی**

این حجم:  $d\tau = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \rightarrow$  **دکارتی:  $d\tau = dx dy dz$**

مثال 2.1.5 یک رویه دوجای در فضای سه بعدی که با مختصات  $(x, y, z)$  داده می شود را در نظر بگیرید. روی این رویه می توان مثلث مختصات  $(x, y, z)$  را اختصار کرد و می آید واضح است این است که بر ماحات  $d\sigma_z$  فقط در راستای  $\hat{z}$  مؤلفه دارد. پس اگر یک رویه با مختصات  $(q_1, q_2)$  اعتبار کنیم، بر ماحات  $d\sigma_z$  در راستای  $\hat{z}$  خواهد بود. زاویه بین تبدیلی دستگاه دکارتی به دستگاه عام  $q_i$  ها برابر است.

دستگاه دکارتی:  $d\sigma_{xy} \hat{z} = dx dy \hat{z} \longrightarrow$  دستگاه کروی:  $dA = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$

دکارتی:  $dA = dx dy$   $\longrightarrow$  دستگاه عام:  $dA \neq dq_i dq_j$

$df = f(x+dx) - f(x)$

$dA = h_i h_j dq_i dq_j$

بر جایابی:  $d\vec{r}_1 = \vec{r}_1(q_1 + dq_1, q_2) - \vec{r}_1(q_1, q_2) = \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_1} dq_1$   $\vec{r}_1 = x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j} + z_1 \hat{k}$   
 $d\vec{r}_2 = \vec{r}_2(q_1, q_2 + dq_2) - \vec{r}_2(q_1, q_2) = \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_2} dq_2$   $\vec{r}_2 = x_2 \hat{i} + \dots$

$dx dy \hat{z} = d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2 \Big|_z = \left[ \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_1} \times \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_2} \right]_z dq_1 dq_2 = \left[ \frac{\partial x_1}{\partial q_1} \frac{\partial y_2}{\partial q_2} - \frac{\partial y_1}{\partial q_1} \frac{\partial x_2}{\partial q_2} \right] dq_1 dq_2$   
**زاویه بین تبدیلی**

$$\Rightarrow \text{رکوبین تبدیل} \Rightarrow \text{ماتریس} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \end{vmatrix} = J \left( \frac{x, y}{q_1, q_2} \right)$$

$$** : d\vec{r} = \sum h_i dq_i \hat{e}_i \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = h_i \hat{e}_i \rightarrow dA = h_i h_j$$

مثال ۱: رکوبین در دستگاه قطبی

$$x = \rho \cos \phi \rightarrow \frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos \phi, \quad \frac{\partial x}{\partial \phi} = -\rho \sin \phi$$

$$y = \rho \sin \phi \rightarrow \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin \phi, \quad \frac{\partial y}{\partial \phi} = \rho \cos \phi$$

$$\Rightarrow J \left( \frac{x, y}{\rho, \phi} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow J \left( \frac{x, y}{\rho, \phi} \right) = \begin{vmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi \\ \sin \phi & \rho \cos \phi \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \phi + \rho \sin^2 \phi = \rho \Rightarrow \underbrace{dx dy}_{\text{مساحت در مختصات دکارتی}} \rightarrow \underbrace{\rho d\rho d\phi}_{\text{مساحت در مختصات قطبی}}$$

مثال ۲: رکوبین در دستگاه کروی  $dx dy dz \rightarrow dr d\theta d\phi$  (ماتریس در دستگاه کروی)

$$x = r \sin \theta \cos \phi \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \phi, \quad \frac{\partial x}{\partial \phi} = -r \sin \theta \sin \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta \sin \phi, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta \sin \phi, \quad \frac{\partial y}{\partial \phi} = r \sin \theta \cos \phi$$

$$z = r \cos \theta \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \sin \theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \phi} = 0$$

$$\Rightarrow J \left( \frac{x, y, z}{r, \theta, \phi} \right) = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta$$

$$\Rightarrow dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

مختصات دایره‌ای در فضای سه بعدی

تغییر چارچوب به تغییر  $q_i$  متوجه ایم  $\vec{\nabla}_\psi$

$$\vec{\nabla}_\psi \Big|_i = \vec{\nabla}_\psi \cdot \hat{e}_i = \frac{\partial \psi}{\partial q_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i}$$

$$A_i = \vec{A} \cdot \hat{e}_i$$

توجه: برداری است عمود بر سطح ثابت

$$\text{فاصله: } ds_i = h_i dq_i$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \psi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \hat{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \hat{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \hat{e}_3 = \sum \frac{1}{h_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \hat{e}_i$$

نویسند:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_3 h_1 h_2) \right]$$

کر:

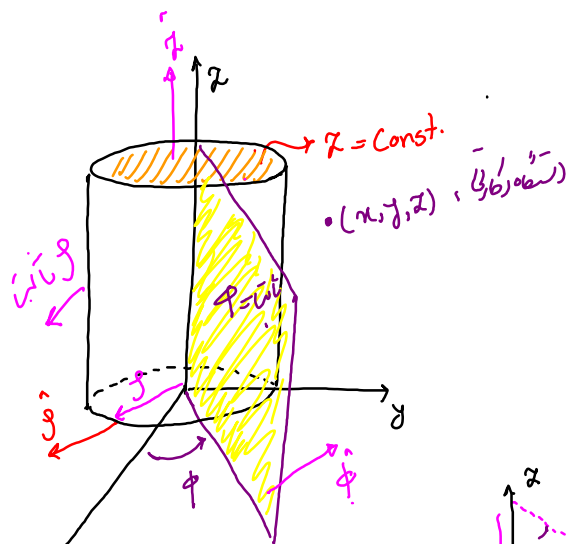
$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \hat{e}_1 h_1 & \hat{e}_2 h_2 & \hat{e}_3 h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix}$$

معادله موج:  $\nabla^2 \psi = k^2 \psi$  (P.O.E)

شکل‌های خاص:

$$\text{در } 3D: \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \rightarrow \begin{cases} \text{ODE مربوط به } x \\ y = \text{"} \\ z = \text{"} \end{cases}$$

نسبت استوانه‌ای  $(\rho, \phi, z)$   
 $(\rho_1, \rho_2, z_3)$



$$0 \leq \rho < \infty$$

$$0 \leq \phi < 2\pi$$

$$-\infty < z < +\infty$$

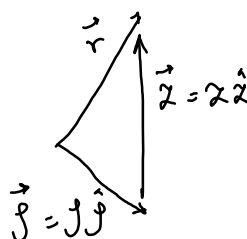
نسبت  
 سطوح مختصات استوانه‌ای:

۱- استوانه‌هایی که محور اصلی آنها محور z است:  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  نسبت

۲- نیم صفحه عمودی از محور z:  $\phi = \tan^{-1}(y/x)$  نسبت

۳- صفحات موازی با صفحه x-y:  $z = \text{نسبت}$

$$\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{z} \Rightarrow \vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}$$



$$g_{ij} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \xrightarrow{i=j} g_{ii} = h_i^2$$

$$g_{11} = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial q_1} \frac{\partial x_k}{\partial q_1} = \left( \frac{\partial x}{\partial \rho} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \rho} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \rho} \right)^2$$

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos \phi \quad \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin \phi$$

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = 0$$

$$\Rightarrow g_{11} = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi + 0 = 1 \Rightarrow h_1 = 1 = h_3$$

$$g_{12} = \int \frac{\partial x_1}{\partial y} \frac{\partial x_2}{\partial \phi} = \frac{\cos \phi}{\partial y} \frac{-g \sin \phi}{\partial \phi} + \frac{\partial y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial \phi} = 0$$

$$g_{22} = \int \frac{\partial x_2}{\partial \phi} \frac{\partial x_2}{\partial \phi} = \left( \frac{\partial x}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \phi} \right)^2 \quad \frac{\partial x}{\partial \phi} = -g \sin \phi$$

$$= g^2 \sin^2 \phi + g^2 \cos^2 \phi = g^2 \Rightarrow h_2 = h\phi = g, \quad h_3 = h_z = 1$$

بردارهای دیراکسی:  $d\vec{r} = \sum h_i da_i \hat{e}_i \Rightarrow d\vec{r} = dy \hat{y} + g d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$

معماری دیراکسی:

$$\vec{\nabla} \psi = \hat{y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{1}{g} \hat{\phi} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{g} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (V_y g) + \frac{\partial}{\partial \phi} (V_\phi) + \frac{\partial}{\partial z} (V_z g) \right\} = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial y} (V_y g) + \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial \phi} V_\phi + \frac{\partial}{\partial z} V_z$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{g} \begin{vmatrix} \hat{y} \times 1 & \hat{\phi} \times g & \hat{z} \times 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 \times V_y & g \times V_\phi & 1 \times V_z \end{vmatrix}$$

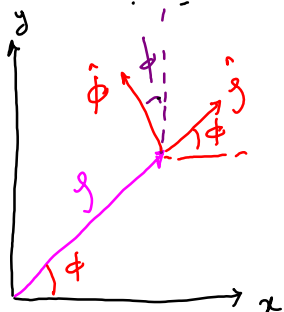
\* تمرین: (برای بیاید و برابر)

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial y} \left( g \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{1}{g^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \vec{v} = \nabla^2 (\hat{y} v_y + \hat{\phi} v_\phi + \hat{z} v_z)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v} \quad \text{* راهی:}$$

\* تمرین 2.4.1, 2.4.2: بردارهای پایه مختصات استوانه‌ای را بر حسب بردارهای پایه مختصات دکارتی بیاید و برعکس



$$\text{I: } \hat{y} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y} \xrightarrow{\times \cos \phi} \hat{y} \cos \phi = \cos^2 \phi \hat{x} + \sin \phi \cos \phi \hat{y}$$

$$\text{II: } \hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \xrightarrow{\times \sin \phi} \hat{\phi} \sin \phi = -\sin^2 \phi \hat{x} + \sin \phi \cos \phi \hat{y}$$

$$\hat{z} = \hat{z}$$

$$\ominus: \begin{aligned} \hat{x} &= \hat{y} \cos \phi - \hat{\phi} \sin \phi \\ \hat{y} &= \hat{y} \sin \phi + \hat{\phi} \cos \phi \end{aligned} \quad \text{برعکس رسی:}$$

تمرین 2.4.3 مستقیم بردارهای پایه در دستگاه استوانه‌ای راجع به مدبر

$$I: \frac{\partial \hat{j}}{\partial \phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} = \hat{\phi}^*, \quad \frac{\partial \hat{j}}{\partial j} = 0$$

$$II: \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} = -\cos \phi \hat{x} - \sin \phi \hat{y} = -\hat{j}^*, \quad \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial j} = 0$$

تمرین 2.4.8 محاسبه سرعت و شتاب یک ذره در دستگاه استوانه‌ای را بیابید.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{r} = j\hat{j} + z\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{d}{dt} (j\hat{j} + z\hat{z}) = \underbrace{\frac{dj}{dt}}_{\hat{j}} \hat{j} + j \underbrace{\frac{d\hat{j}}{dt}}_{\hat{\phi}^*} + \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{\dot{z}} \hat{z} + z \underbrace{\frac{d\hat{z}}{dt}}_{0}$$

$$\frac{dj}{dt} = \frac{\partial j}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} \hat{\phi}^* \Rightarrow \vec{v} = j\dot{\phi} \hat{j} + j\dot{\phi} \hat{\phi}^* + \dot{z} \hat{z}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dj}{dt} \hat{j} + j \frac{d\dot{\phi}}{dt} \hat{j} + \frac{dj}{dt} \dot{\phi} \hat{\phi}^* + j \frac{d\dot{\phi}}{dt} \hat{\phi}^* + j\dot{\phi} \frac{d\hat{\phi}^*}{dt} + \frac{dz}{dt} \hat{z} + z \frac{d\hat{z}}{dt}$$

$$\frac{d\dot{\phi}}{dt} = \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dt} = -\dot{\phi} \hat{j} \Rightarrow \vec{a} = (\ddot{j} - j\dot{\phi}^2) \hat{j} + (j\ddot{\phi} + 2\dot{j}\dot{\phi}) \hat{\phi}^* + \ddot{z} \hat{z}$$

حرکت دایره‌ای: ثابت  $j = R$   $\leftarrow \dot{j} = \ddot{j} = 0$   
در صفحه

$$\vec{v} = j\dot{\phi} \hat{\phi}^*$$

$$\vec{a} = -j\dot{\phi}^2 \hat{j} + j\ddot{\phi} \hat{\phi}^*$$

در جهت دایره:  $\vec{v} = R\omega \hat{\phi}^*$

شتاب جانبی:  $\vec{a} = -R\omega^2 \hat{j}$

حرکت دایره‌ای کنش: ثابت  $R = j$

$\dot{\phi} = \omega$  ثابت  $\leftarrow \ddot{\phi} = 0$