

ملفوظات :

A diagram showing a set S represented by an irregular closed curve. Inside the curve, there are three points: q_1 , q_2 , and a vertical ellipsis $\vdots$. The point q_1 is on the left, q_2 is on the right, and the ellipsis is in the center. The label S is placed outside the curve at the bottom right.

من بار اسرعی معافی و رازر مبداء السعاه تمکات فراری هم.

میدان الکتریکی: $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$. می خواهیم قانون گاوس را اثبات کنیم .

الف - سطح ۵ واحدی در نظر می گیریم که بار ۵ واحدی نداشته باشد.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{\omega} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{r} \cdot d\vec{\omega}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{r}/r^3)}_{=0} d\tau = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot (f(r) \hat{r}) = 3f(r) + r \frac{df}{dr} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{r}^{-n} \hat{r}) = (3-n) \vec{r}^{-n} \quad (\vec{r} \neq 0 \text{!}) \xrightarrow{n=3} \vec{\nabla} \cdot (\vec{r}^{-3} \hat{r}) = 0$$

ب۔ سطحی بارش اور درختوں کی طرف سے آبی بارش کو جمع کرنا۔ (سطحی بارش)

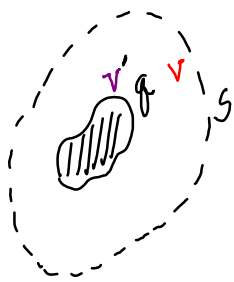
$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = 0 \Rightarrow \oint_S \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot d\vec{\sigma} + \oint_{S'} \frac{\hat{r} \cdot d\vec{\sigma}'}{\delta^2} = 0 \quad *$$

السطح کروی : $d\vec{s} = r^2 d\Omega \hat{r} \rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{r} r^2 d\Omega$

$$\oint_{S'} \frac{\hat{r} \cdot d\vec{\sigma}'}{s^2} = \oint_{S'} \frac{\hat{r} \cdot \cancel{s} d\Omega (-\hat{r})}{\cancel{s}} = -\oint d\Omega = -4\pi$$

$$\Rightarrow * : \oint_S \frac{\hat{r} \cdot d\vec{\sigma}}{r^2} = 4\pi \Rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\hat{r} \cdot d\vec{\sigma}}{r^2} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$\Rightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{\omega} = \frac{q}{\epsilon_0}$
قانون گاوس



$$\oint_{S=\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = \frac{\int_V \rho d\tau}{\epsilon_0}$$

مقدار گاوس

$$\oint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau = \frac{\int_V \rho d\tau}{\epsilon_0}$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

قانون ماکسول

تبدیل اسکالر

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \phi) = \rho / \epsilon_0 \Rightarrow \nabla^2 \phi = \rho / \epsilon_0$$

معادله پواسون

در حالتی که میدان الکتریکی صاف باشد: $\rho = \epsilon_0 \nabla^2 \phi$

معادله لاپلاس

$$\nabla^2 \phi = 0$$

تابع دلتای دیراک Dirac Delta function

در نسبت قانون گاوس داریم: اگر اشکال نامشعب باشد 4π باشد

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{r} / r^3) d\tau = \int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{r} / r^2) d\tau = \int_V \vec{\nabla} \cdot (-\vec{r} / r) d\tau$$

در نسبت قانون گاوس داریم: اگر اشکال نامشعب باشد 4π باشد

دانشیم: $\vec{\nabla} \phi(r) = \hat{r} \frac{d\phi}{dr} = \hat{r} / r^2 \leftarrow \phi(r) = -1/r \rightarrow \vec{\nabla}(-1/r) = \hat{r} / r^2$

$$\Rightarrow \nabla^2 (1/r) = -4\pi \delta(\vec{r}) = -4\pi \delta(x) \delta(y) \delta(z)$$

اگر اشکال نامشعب نقطه $\vec{r}=0$ باشد

$$\Rightarrow \int \nabla^2 (-1/r) d\tau = \int +4\pi \delta(\vec{r}) d\tau = \int_0^{4\pi} \delta(\vec{r}) d\tau = 1$$

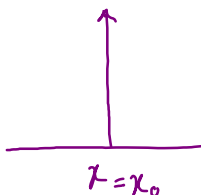
تابع دلتا

حالت یک بعدی: اگر $x=x_0$ باشد اشکال نامشعب باشد

$$\int_a^b \delta(x-x_0) dx = 1$$

حالت یک بعدی: اگر $x=x_0$ باشد اشکال نامشعب باشد

$$\delta(x-x_0) = 0; x \neq x_0$$



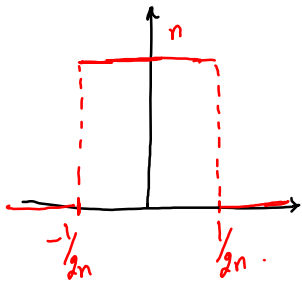
تابع دلتای دیراک دارای خصوصیات معادل است:

$$\textcircled{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) dx = 1$$

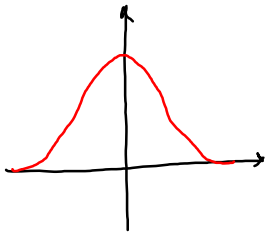
$$\textcircled{3} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-x_0) dx = f(x_0)$$

تابع غیر رگرسیو است.

دنباله تریابع



$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0 & x < -\frac{1}{2n} \\ n & -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n} \\ 0 & x > \frac{1}{2n} \end{cases}$$



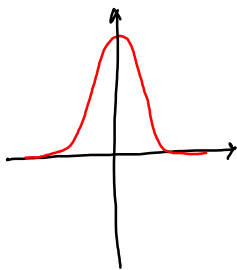
$$\textcircled{2}' \delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2 x^2)$$

نیم عرض تابع گاوس

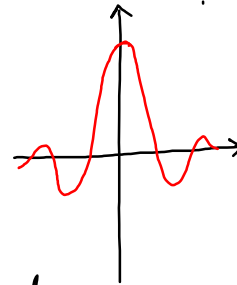
$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x)$$

از تعاریف تابع گسسته نیست

چون $x=0$ در حد $n \rightarrow \infty$ هر چه دنباله وجود ندارد.



$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi} \frac{1}{n^2 x^2 + 1}$$



$$\delta_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x} = \frac{1}{\pi} \int_{-n}^{+n} e^{ixt} dt$$

$\sqrt{\frac{\pi}{n^2}}$

$$\textcircled{1} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) dx$$

شرط نرمالیزه بودن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) dx = 1 \rightarrow \textcircled{2}': \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2} dx = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 x^2} dx = 1 \quad \checkmark$$

$$\text{دنباله اشتراک} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta_n(x) dx \xrightarrow{\text{حد دنباله}} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta_n(x) dx = f(0) : \text{حد دنباله اشتراک}$$

$\textcircled{3}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta_n(x) dx$$

$$\star : \delta_n(x) = \delta_n(-x) : \text{دنباله هارموج هسند} \Rightarrow \delta(x) = \delta(-x) \rightarrow \text{دنباله زوج است.}$$

تبدیلی در تابع

$$\text{الف} - \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad ax=y \Rightarrow a dx = dy$$

$\textcircled{3} : f(0)$

$$\text{ب) : } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(ax) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y/a) \delta(y) \frac{1}{a} dy = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y/a) \delta(y) dy$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(ax) dx = \frac{1}{|a|} f(0) \quad \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(ax) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{1}{|a|} \delta(x) dx$$

$$\textcircled{3}: f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx$$

$$\Rightarrow \delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$$

چون تابع δ زوج است باید

$|a|$ نرسته شود.

$$\therefore \delta(g(x)) = \sum_a \frac{\delta(x-a)}{|g'(a)|}$$

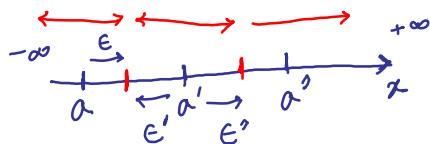
a ها ریشه های تابع $g(x)$ هستند $\rightarrow g(x=a)=0$

$$\text{نشان: } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(g(x)) dx = \int_{-\infty}^{a+\epsilon} f(x) \delta[(x-a)g'(a)] + \int_{a'-\epsilon'}^{a'+\epsilon''} f(x) \delta[(x-a')g'(a') + \dots] = I$$

$$g(x) = g(a) + (x-a)g'(a)|_{x=a} + \dots \Rightarrow g(x) \approx (x-a)g'(a)$$

محل ریشه a با خط قرمز مشخص

نشان (ز) $a=0$ تا $+\infty$ را به بازه های تقسیم کنیم که درون هر بازه یک ریشه تابع $g(x)$ موجود داشته باشد.



$$\Rightarrow I = \sum_a \int_{a-\epsilon}^{a+\delta} f(x) \delta[(x-a)g'(a)] dx$$

$$\text{از رابطه الف: } \frac{\delta(x-a)}{|g'(a)|}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(g(x)) dx = \sum_a \int_{a-\epsilon}^{a+\delta} f(x) \frac{\delta(x-a)}{|g'(a)|} dx$$

$$\Rightarrow \delta(g(x)) = \sum \frac{\delta(x-a)}{|g'(a)|}$$

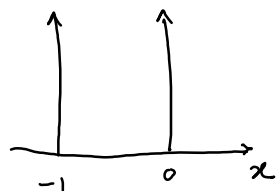
مثال:

$$\delta(x^2+x) = ? \quad g(x) = x^2+x = x(x+1) = 0 \Rightarrow \text{ریشه ها: } x=0, x=-1$$

$$g'(x) = 2x+1 \rightarrow x=0: g'(x=0)=1$$

$$x=-1: g'(x=-1)=-1$$

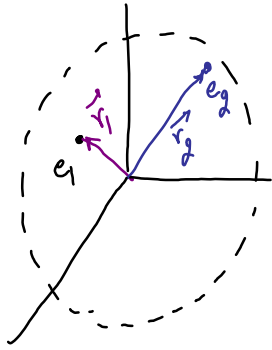
$$\Rightarrow \delta(x^2+x) = \frac{\delta(x-0)}{|g'(x=0)|} + \frac{\delta(x-(-1))}{|g'(x=-1)|} = \delta(x) + \delta(x+1)$$



مشتق تابع دلتا

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta'(x-x_0) dx = f(x) \delta(x-x_0) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) f'(x) dx = -f'(x_0) \quad \textcircled{3}$$

مثال: فرض کنید n باربندگی باباها ی $\mathbb{R}^3$ داریم که در مکان $\vec{r}_i$ قرار گرفته اند. که با هم به نام R حل می شود و تقریباً به هم می پیوندد بطوری که $R \ll r$ قانون گاوس را تحقق کنید.



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = - \oint_S \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{\sigma}$$

$$= - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi d\tau = - \int_V \underbrace{\vec{\nabla}^2 \phi}_{\text{قضیه پواسون}} d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \underbrace{\rho}_{\text{کثرت بارهای داخل کمره به نام R قرار گرفته اند}} d\tau$$

$$\int \rho d\tau = \int (e_1 \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) + e_2 \delta(\vec{r} - \vec{r}_2) + \dots) d\tau$$

$$= \sum_{i=1}^n \int e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) d\tau = \sum_{i=1}^n e_i \int \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) d\tau = \sum_{i=1}^n e_i$$

نمونه استرانی تابع دلتا

$$\text{دلتا: } \delta_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{+n} e^{ix\omega} d\omega$$

$$\downarrow$$

$$\delta_n(t-x) = \frac{\sin n(t-x)}{\pi(t-x)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{+n} e^{i(t-x)\omega} d\omega \quad **$$

$$\text{استرانی فوری: } F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (F) \longrightarrow G(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t/k} dt$$

$$\text{دلتا: } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta_n(t-x) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{+n} e^{i(t-x)\omega} d\omega dt$$

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-0) dx$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(t-x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{+n} e^{i(t-x)\omega} d\omega \Rightarrow \delta(t-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-x)} d\omega$$