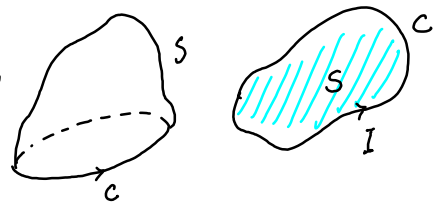


یکی از قوانین ماکسول:  $\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$  حالت باینل  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{B}/\mu_0 = \vec{H} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$

$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot d\vec{\omega} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{\omega}$

قضیه استوکس:  $\oint_{C=\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow I = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell}$

روی سطحی انشعابی گزینیم:



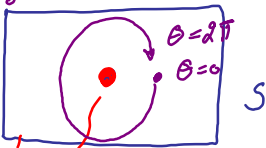
قانون آرنست:  $\vec{B}$  یا  $\vec{H}$  در داخل سیم

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  انشعاب سطحی  $\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{\omega} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{\omega} \Rightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \Phi_B$  قانون فارادای

قانون استوکس:  $\int_{C=\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$  و شار گذرنده از سطح  $\Phi_B$

تقریب باینل

تقریب باینل (تأثیرات مقدماتی)  $V(\theta=0) \neq V(\theta=2\pi)$



نیروی  $\vec{F}$  بر روی سطح همنواهی داریم. فیزیکی نسیم  $\vec{F} = -\vec{\nabla} \phi$  (تقریب باینل) (کار)

مقدار می دانسیم:  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  نیروی  $\vec{F}$  می نیروی باینل است.

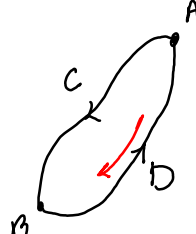
هر مسیر بسته در منطقه همنواهی کار هر نیروی باینل روی مسیر بسته صفر است.

نیروی باینل:  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$   $-\vec{\nabla} \phi$

نکته دوم: تعریف ①، ②، ③ محال هم هستند.

③:  $\oint_{ACBD} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \int_{ACB} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{BDA} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

$\Rightarrow \int_{ACB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{ADB} \vec{F} \cdot d\vec{r}$



کار انجام دهنده توسط تابع  $\phi$  در سطح از نقطه

به نقطه B، به هر حرکتی که در دو نقطه ناهمبازی داشته باشند.

کار انجام دهنده توسط نیروی  $\vec{F}$ :  $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -[\phi(B) - \phi(A)]$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} = -d\phi = -\vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} \Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla}\phi \quad (\text{رابطه 1})$$

↓  
قید دایم

$$\textcircled{3}: \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \xrightarrow{\text{قضیه استوک}} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{\sigma} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad (\text{رابطه 2})$$

این سطح دایره

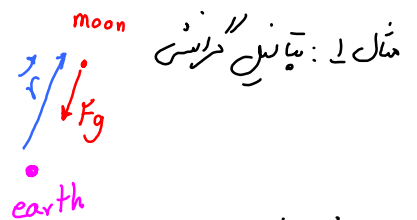
حال از رابطه 2 ندرج می‌کنیم:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \rightarrow \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{\sigma} = 0 \xrightarrow{\text{قضیه استوک}} \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{\sigma} = \oint_{C=S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$$

$$\begin{array}{ccc} \vec{F} = -\vec{\nabla}\phi & & \\ \swarrow & & \searrow \\ \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 & \iff & \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \end{array}$$

نیروی گرانشی:  $\vec{F}_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} = -k/r^2 \hat{r}$

بردار به سمت جاذب



نیروی گرانشی در همه جا ثابت است.

$$m_1 = 1$$

توانش گرانشی در نقطه r معقد است؟

توانش برابر است با کار انجام داده برای آوردن یک جسم با جرم واحد از بی‌نهایت به نقطه r

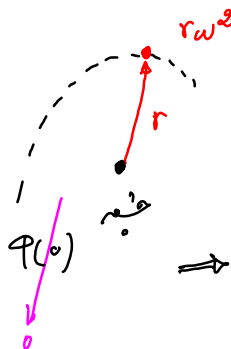
$$\int_r^\infty \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = \phi_g(r) - \phi_g(\infty) \rightarrow -k \int_r^\infty \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{r} dr = \phi_g(r) \Rightarrow \phi_g(r) = -k/r$$

توانش گرانشی یک جسم به جرم m در نقطه r

$$\phi_g(r) = -\frac{Gm}{r}$$

نیروی گریز از مرکز:  $\vec{F}_c = m r \omega^2 \hat{r}$

نیروی گریز = 0

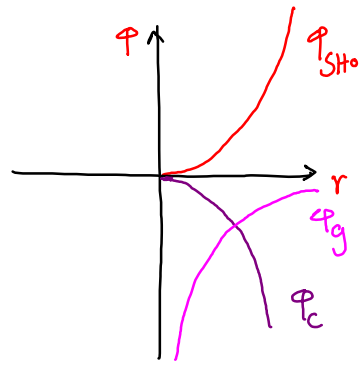


مثال 2: توانش گریز از مرکز

$$\int_r^0 \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = -\int_0^r r \omega^2 \hat{r} \cdot \hat{r} dr = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2 = \phi(r) - \phi(0) \Rightarrow \phi(r) = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2$$

مثال 3: توانش فنر هابدا

$$\vec{F}_{SHO} = -k\vec{r} \Rightarrow \phi(r) - \phi(0) = -\int_0^r (-k\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} k r^2 \Rightarrow \phi(r) = \frac{1}{2} k r^2$$



به تیانق را با هم درین نمودار رسم می کنیم :

$$df = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

تیمو دینامیک / آیا  $df$  یک دیفرانسیل کامل است ؟

آری  $df$  فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی بستگی دارد ؟

تعریف مشتق کامل بودن در ریاضیات :

$$f = f(x,y) \rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$\rightarrow P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

نقد دیفرانسیل کامل بودن

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = F_x dx + F_y dy = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad ; \quad F_x = P(x,y), \quad F_y = Q(x,y)$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_z = 0 \Rightarrow \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ در مسیری بسته (x,y) در مسیری بسته}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ در مسیری بسته (x,y) در مسیری بسته}$$



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{تایید برابری}$$

$$\vec{B} = B_1 \hat{x} + B_2 \hat{y} + B_3 \hat{z} \quad \xrightarrow{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0} \quad \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} = 0$$

$$\vec{A} = A_1 \hat{x} + A_2 \hat{y} + A_3 \hat{z}$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial x} = -\left(\frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z}\right) *$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial y} = B_1 \\ -\frac{\partial A_3}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial z} = B_2 \\ -\frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial A_2}{\partial x} = B_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial A_3}{\partial x} = B_2 \rightarrow A_3 = -\int B_2 dx + f_3(y,z) \\ +\frac{\partial A_2}{\partial x} = B_3 \Rightarrow A_2 = +\int B_3 dx + f_2(y,z) \end{cases}$$

تایید برابری

$$(I): -\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{\partial A_3}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial B_3}{\partial z} dx - \frac{\partial f_2}{\partial z} - \int_{x_0}^x \frac{\partial B_2}{\partial y} dx + \frac{\partial f_3}{\partial y}$$

رابطه I را با مشتق A2 و A3 حکمی کنیم.

$$= - \int_{x_0}^x \left( \frac{\partial B_3}{\partial z} + \frac{\partial B_2}{\partial y} \right) dx + \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} = I$$

$$B_1 = B(x, y, z) \Downarrow$$

$$I = B_1(x, y, z) - B_1(x_0, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}$$

$$f_3 = \int_{y_0}^y B_1(x_0, y, z) dy, \quad f_2 = 0 \quad \text{فرض می کنیم}$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial f_3}{\partial y} = B_1(x_0, y, z) \Rightarrow I = B_1(x, y, z) \quad \checkmark$$

$$A_3 = - \int_{x_0}^x B_2 dx + \int_{y_0}^y B_1(x_0, y, z) dy$$

$$A_2 = \int_{x_0}^x B_3 dx$$

$$A_1 = 0$$

بی تیانیلی برای  $\vec{A}$  را بر حسب  $\vec{B}$  بدست آورده ایم.

\*  $\vec{A}$  بدست آمده در بالا تنها انتخاب نیست:

۱- از آنجایی که  $\vec{B}$  مستقر است، می توانیم به  $\vec{A}$  یک ثابت اضافه کنیم:

۲- چون کرل همگرا باشد، مغزایست می توانیم به  $\vec{A}$ ،  $\vec{\chi}$  را اضافه کنیم بدون این که  $\vec{B}$  عوض شود.

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\chi} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{\chi} = \vec{B}$$

۳-  $f_2, f_3$  تنها انتخابی ما نیستند

\*  $A_1 = 0$  تنها انتخاب نیست و می توان آن را به صورت دیگر انتخاب کرد.

مثال هم: میدان مغناطیسی  $\vec{B}$  در جهت  $\hat{z}$  داریم:  $\vec{B} = B_0 \hat{z}$   $B_0$  ثابت است.  $\vec{A}$  را بدست آوریم.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = B_0 \hat{z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = B_0 \end{cases}$$

فرض می کنیم  $A_1 = 0$  و از روابط \* \* \* داریم،

$$A_3 = 0$$

$$A_2 = \int B_0 dx = B_0 x$$

$$\Rightarrow \vec{A} = B_0 x \hat{y}$$

ب- فرض کنیم  $A_3 = 0$ ، روابط  $x$  به این شکل نوشته شود:

$$-\frac{\partial A_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial A_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = B_0$$

$$A_2 = A_2(x, y) \quad A_1 = A_1(x, y)$$

انتگرال بگیریم:

$$A_2 = Px B_0 \leftarrow A_2 = P \int B_0 dx$$

$$A_1 = (P-1)B_0 y \leftarrow A_1 = (P-1) \int B_0 dy$$

$$\Rightarrow \vec{A} = (P-1) y \hat{x} + Px B_0 \hat{y} + \frac{1}{2} x B_0 \hat{y} - \frac{1}{2} x B_0 \hat{y}$$

$$= \underbrace{PB_0 y \hat{x}}_{- \frac{1}{2} B_0 y \hat{x}} - \underbrace{B_0 y \hat{x}}_{- \frac{1}{2} B_0 y \hat{x}} + \frac{1}{2} x B_0 \hat{y} - \frac{1}{2} x B_0 \hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = B_0 y (P - \frac{1}{2}) \hat{x} + x B_0 (P - \frac{1}{2}) \hat{y} - \frac{1}{2} B_0 (y \hat{x} - x \hat{y})$$

$$\Rightarrow \vec{A} = B_0 (P - \frac{1}{2}) (y \hat{x} + x \hat{y}) - \frac{1}{2} B_0 (y \hat{x} - x \hat{y})$$

درجه دوم در  $\vec{A}$  در فرمول برابر  $\vec{\nabla} \chi$  است.  $\chi = xy \Rightarrow \vec{\nabla} \chi = (y \hat{x} + x \hat{y}) B_0 (P - \frac{1}{2})$  درجه دوم در  $\vec{A}$  در فرمول برابر  $\vec{\nabla} \chi$  است.  $\vec{A} = -\frac{1}{2} B_0 (y \hat{x} - x \hat{y}) \leftarrow$  درجه دوم در  $\vec{A}$  در فرمول برابر  $\vec{\nabla} \chi$  است.

$$\vec{B} \times \vec{r} = B_0 \hat{z} \times (x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}) = B_0 (\underbrace{x \hat{z} \times \hat{x}}_{y \hat{y}} + \underbrace{y \hat{z} \times \hat{y}}_{-x \hat{x}} + \underbrace{z \hat{z} \times \hat{z}}_0) = B_0 (x \hat{y} - y \hat{x})$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{1}{2} B_0 (x \hat{y} - y \hat{x}) \Rightarrow \vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$$

کتابی کنیم که  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  ؟

$$1-8.11 \quad \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{r}) = \frac{1}{2} \left\{ (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} - \vec{r} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) + \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) \right\} = \frac{1}{2} (-\vec{B} + 3\vec{B}) = \vec{B} \quad \checkmark$$

$$(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = (x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}) (B_0 \hat{z}) = x \frac{\partial B_0}{\partial x} \hat{z} + y \frac{\partial B_0}{\partial y} \hat{z} + z \frac{\partial B_0}{\partial z} \hat{z} = 0$$

$$\vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) = (B_0 \hat{z} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} = B_0 \frac{\partial}{\partial z} \vec{r} = B_0 \left\{ \frac{\partial x}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial y}{\partial z} \hat{y} + \frac{\partial z}{\partial z} \hat{z} \right\} = B_0 \hat{z} = \vec{B}$$