

محله بنیم انتگرال برداری تعریف انتگرالی $\vec{\nabla}$ قضیه طویل قضیه گرین قضیه استوکس

مذکر: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, $\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$ $\rightarrow \vec{L} \times \vec{L} = i\hbar \vec{L}$

$$\vec{L} = -i\hbar \vec{r} \times \vec{\nabla} \rightarrow \vec{L} = -i\hbar \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \left\{ \hat{x} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) + \hat{y} \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) + \hat{z} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \right\} (-i\hbar)$$

$$L_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) = y p_z - z p_y$$

$$\vec{L} \times \vec{L} \psi = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) & -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) & -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ -i\hbar \left(y \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) & -i\hbar \left(z \frac{\partial \psi}{\partial x} - x \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) & -i\hbar \left(x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (\vec{L} \times \vec{L} \psi)_x = -\hbar^2 \left\{ \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(z \frac{\partial \psi}{\partial x} - x \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right. \\ = -\hbar^2 \left\{ z \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} + x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - z y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} + x y \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} \right\} \\ \left. + \hbar^2 \left\{ x z \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - x^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} - z y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + y \frac{\partial \psi}{\partial z} + x y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right\} \right.$$

$$\Rightarrow (\vec{L} \times \vec{L} \psi)_x = -(\hbar^2) \left\{ y \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} = -i\hbar L_x \psi \Rightarrow (\vec{L} \times \vec{L}) = -i\hbar \vec{L}$$

علاست منفی!

انتگرال های برداری

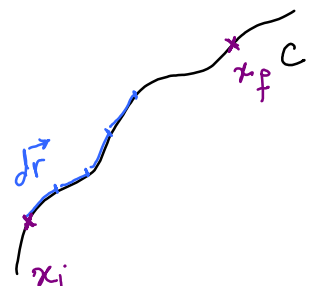
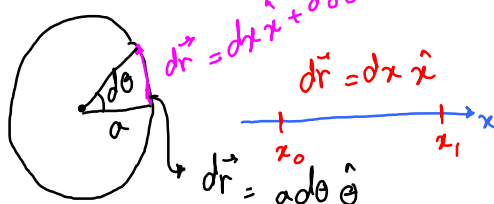
$$d\vec{r} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$$

$$\int_C \varphi d\vec{r}, \int_C \vec{V} \cdot d\vec{r}, \int_C \vec{V} \times d\vec{r}$$

line Integrals

مسیر انتگرالی می توان باز یا بسته باشد.

اگر $\varphi = \varphi(x, y, z)$: اعداد



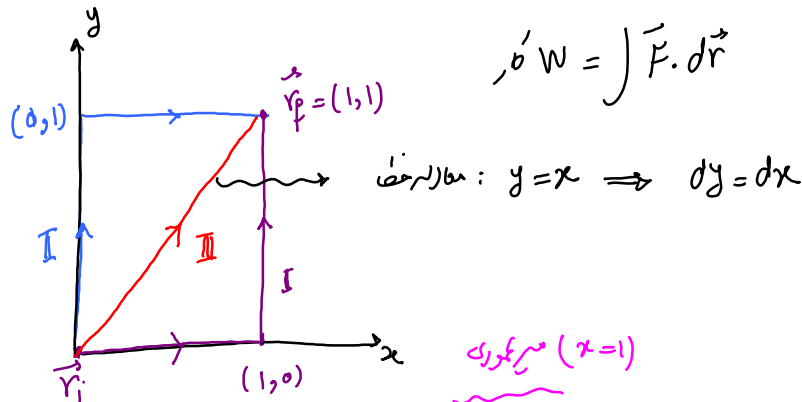
$$I: \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \varphi d\vec{r} = \hat{x} \int \varphi(x,y,z) dx + \hat{y} \int \varphi(x,y,z) dy + \hat{z} \int \varphi(x,y,z) dz$$

$$\text{مثال: } \varphi=1 \rightarrow \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} d\vec{r} = \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \Big|_{(x_i, y_i, z_i)}^{(x_f, y_f, z_f)}$$

$$II: \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C F_x(x,y,z) dx + \int_C F_y(x,y,z) dy + \int_C F_z(x,y,z) dz$$

مثال: نیروی وارد شده بر یک جسم صلب است. کار انجام شده از نقطه $\vec{r}_i = (0,0)$ به نقطه $\vec{r}_f = (1,1)$ را بیابید.

$$\vec{F} = \underbrace{-y}_{F_x} \hat{x} + \underbrace{x}_{F_y} \hat{y}$$



$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$I \text{ مسیر: } W_1 = \int_{x=0}^{x_f=1} F_x dx + \int_{y=0}^{y_f=1} F_y dy = - \int_0^1 y dx + \int_0^1 x dy = \int_0^1 1 dy = y \Big|_0^1 = 1$$

$$II \text{ مسیر: } W_2 = \int_{y=1}^y F_x dx + \int_{x=0}^x F_y dy = - \int_0^1 1 dx = -1$$

نیروی $\vec{F}$ می‌نویسید با علامت.

$$III \text{ مسیر: } W_3 = \int_{-y}^y F_x dx + \int_x^x F_y dy = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (-y+x) dx = -yx + \frac{1}{2}x^2 \Big|_{(0,0)}^{(1,1)}$$

$$\Rightarrow W_3 = (-1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 1) - 0 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

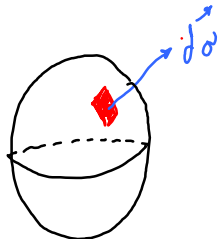
$$\int \varphi d\vec{\sigma}, \int \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}, \int \vec{v} \times d\vec{\sigma}$$

Surface Integrals

بردار نرمال سطح

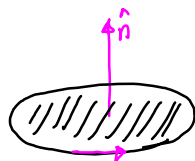
$$d\vec{\sigma} = \hat{n} dA$$

شماره از روی یک سطح عبوری کند.



الف- اگر سطح بسته باشد (مثل سطح میز) جهت تکه را به سمت بیرون سطح می گیریم.

ب- اگر سطح باز باشد، بخشی بیان دارد که خط سطح را محدود می کند و مانول دست راست جهت بردار نرمال صفحه را معین می کند.



الان حجم یک استوانه است. $dV = d^3x$ یا d^3r

$\int_V dV$
الان حجم

Volume Integrals

تعریف انتگرالی "ترازیان"، دیریران و گرنل

$\vec{\nabla} \phi = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\int \phi d\vec{s}}{\int dV} *$

حجم بی نهایت کوچک ازفضا: $\int dV$
برداران سطح: $d\vec{s}$

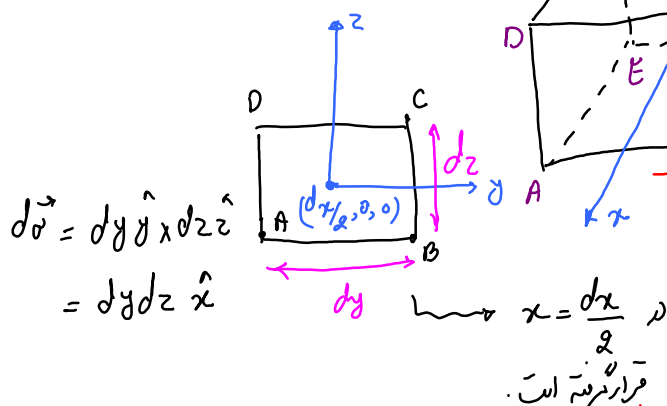
$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\int \vec{v} \cdot d\vec{s}}{\int dV} **$

$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\int d\vec{s} \times \vec{v}}{\int dV}$

انبات رابطه *

$\phi = \phi(x, y, z)$

مبدأ دسته بندی سطوح در مرکز یک متعلق است.



$\int \phi d\vec{s} = \hat{x} \int_{ABCD} \phi(dx/2, 0, 0) dy dz + (-\hat{x}) \int_{EFGH} \phi(-dx/2, 0, 0) dy dz$

$+ \hat{y} \int_{BCGF} \phi(0, dy/2, 0) dx dz + (-\hat{y}) \int_{AEHD} \phi(0, -dy/2, 0) dx dz$

$+ \hat{z} \int_{DCGH} \phi(0, 0, dz/2) dx dy + (-\hat{z}) \int_{ABFE} \phi(0, 0, -dz/2) dx dy$

رابطه تیلر: $f(x_0 + \epsilon) = f(x_0) + \epsilon \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} + \dots$

$\varphi(dx/2, 0, 0) = \underbrace{\varphi(0, 0, 0)}_{\varphi} + dx/2 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{0,0,0} + \dots$

$\int \varphi d\vec{\sigma} = \hat{x} \int (\varphi + dx/2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}) dy dz - \hat{x} \int (\varphi - dx/2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}) dy dz + \dots$

$= (\hat{x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \varphi}{\partial z}) \int dx dy dz \Rightarrow \vec{\nabla} \varphi = \lim_{\int d\sigma \rightarrow 0} \frac{\int \varphi d\vec{\sigma}}{\int d\sigma}$

نصفه "کاذب"

$\oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d\sigma$



$C = \partial S$



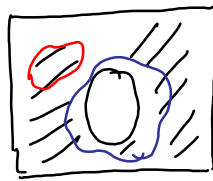
مرز حجم: $S = \partial V$

مرز حجم N بعدی = ابر سطح N-1 بعدی

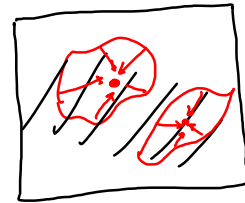
شرط ساده: بردار عمود مستقیم (در آن بیرون باشد و اشتراک تری بردار یک محدوده همبسته را انجام شود.

simply connected

به خط آبی که دور ناحیه همبسته چیده است می‌توان باید سرتان پیوسته به یک نقطه تبدیل کرد.



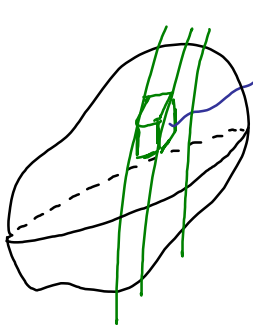
همبسته ساده



shrink

همبسته

توضیح تصویری: اشتراک سطح یک بردار بر روی یک سطح بسته برابر است با اشتراک حجمی درون آن بردار بر روی حجمی که توسط آن سطح احاطه شده است.



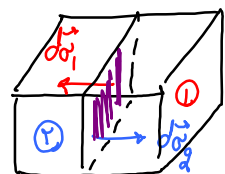
$d\sigma = dx dy dz$

$\vec{\nabla} \cdot (\vec{f}(\vec{r})) = \begin{cases} \text{شماره خروجی از یک سطح در واحد زمان} \\ \text{در واحد حجم} \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{f}(\vec{r})) dx dy dz = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$

$** : \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \lim_{\int d\sigma \rightarrow 0} \frac{\int \vec{A} \cdot d\vec{\sigma}}{\int d\sigma}$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} d\sigma = \sum \vec{A} \cdot d\vec{\sigma}$ برای سطح غشایی



$d\vec{\sigma}_1 = -d\vec{\sigma}_2$

روی سطح جمع می‌زنیم

$$\Rightarrow \sum_{\text{جمع}} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d\tau = \sum_{\text{سطح خارجی}} \vec{A} \cdot d\vec{\sigma} \xrightarrow{\text{تبدیل به انتگرال}} \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d\tau = \oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{\sigma}$$

$\partial V = \text{جمع}$

قضیه گرین اگر u و v در تابع اسکالر باشند داریم:

$$\vec{\nabla} \cdot (u \vec{\nabla} v) = u \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} v + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v$$

$$\vec{\nabla} \cdot (v \vec{\nabla} u) = v \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} u + \vec{\nabla} v \cdot \vec{\nabla} u$$

تقریب در رابطه: $\iiint_V (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d\tau = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (u \vec{\nabla} v - v \vec{\nabla} u) d\tau$

استرال می‌شود: $\oint_{\partial V} (u \vec{\nabla} v - v \vec{\nabla} u) \cdot d\vec{\sigma}$

$$\Rightarrow \int_V (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d\tau = \oint_{\partial V} (u \vec{\nabla} v - v \vec{\nabla} u) \cdot d\vec{\sigma} \quad \text{قضیه گرین}$$

حالت‌های خاص (قضیه گاوس)

یادآوری

$$\vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{a}) = \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{a} + \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \quad \text{مثال: } \vec{a} = \vec{r} \quad \vec{a} = \vec{r}$$

$$\vec{A}(x, y, z) = A(x, y, z) \vec{\sigma} \quad \text{فرض کنید}$$

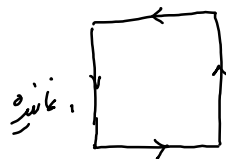
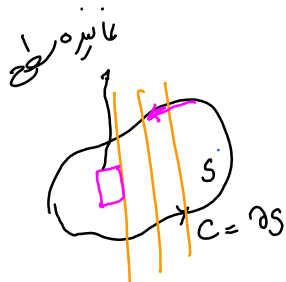
که بردار ثابت است.
 $\vec{\sigma}$ می‌تواند بردار دفره‌ها باشد.

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d\tau = \oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{\sigma} \xrightarrow{\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0} \vec{a} \cdot \int_V \vec{\nabla} A d\tau = \vec{a} \cdot \oint_{\partial V} A d\vec{\sigma}$$

که ثابت

$$\Rightarrow \iiint_V \vec{\nabla} A d\tau = \oint_{\partial V} A d\vec{\sigma}$$

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \times \vec{P}) d\tau = \oint_{\partial V} d\vec{\sigma} \times \vec{P} \quad \text{قضیه: اگر } \vec{A} = \vec{\sigma} \times \vec{P} \text{ ثابت باشد}$$

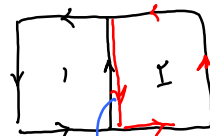


$$\oint_{\partial S} \vec{r} \cdot d\vec{\lambda} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{r} \cdot d\vec{\sigma}$$

$\partial S = C$ استرال سطح

قضیه استروم

جمع می‌زنیم روی تمام متغیرها



$$d\vec{\lambda}_1 = d\vec{y} \quad d\vec{\lambda}_2 = d\vec{y}(-\vec{j})$$

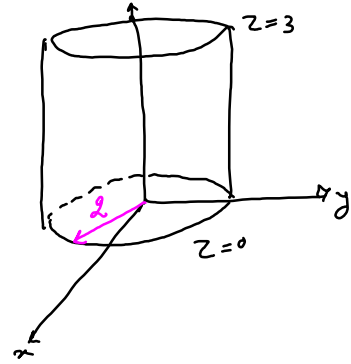
روی مرزهای مشترک $d\vec{\lambda}$ ها هم‌جهت یا خنثی می‌کند

$$\Rightarrow \sum_{\text{همه متغیرها}} \vec{r} \cdot d\vec{\lambda} = \sum_{\text{خطوط خارجی}} \vec{r} \cdot d\vec{\lambda}$$

دانش : جوشن = $\int \vec{v} \cdot d\vec{\lambda} = (\vec{v} \times \vec{v})_z \underbrace{dx dy}_{\text{حکم در } z} = (\vec{v} \times \vec{v}) \cdot dxdy \hat{z}$

$\Rightarrow \int_{\text{خطوط بسته}} \vec{v} \cdot d\vec{\lambda} = \int (\vec{v} \times \vec{v}) \cdot d\vec{\sigma} \xrightarrow{\text{تبدیل به سطح}} \oint \vec{v} \cdot d\vec{\lambda} = \int_S (\vec{v} \times \vec{v}) \cdot d\vec{\sigma}$

شماره : $\vec{F} = 4x\hat{x} - 2y^2\hat{y} + z^2x^2\hat{z}$ را بر روی سطح استوانه‌ای به شکل زیر می‌کنیم.
 $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 3$



$\int \vec{v} \cdot \vec{A} d\sigma = \int \vec{A} \cdot d\vec{\sigma}$ $\vec{v} \cdot \vec{A}$: شار $\leftarrow$ مقیاس بردار

$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} \rightarrow \Phi = \int \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}$

انتقال دگر (از مقیاس بردار)

$\oint \vec{v} \cdot d\vec{\lambda} = \int_S (\vec{v} \times \vec{v}) \cdot d\vec{\sigma}$

فرض کنید $\vec{v} = \vec{a} \phi$ که $\vec{a}$ یک بردار ثابت است.

R.H.S = $\int \{ \vec{v} \times (\vec{a} \phi) \} \cdot d\vec{\sigma} = \int_S (\vec{v} \phi \times \vec{a}) \cdot d\vec{\sigma} = - \int \vec{a} \times \vec{v} \phi \cdot d\vec{\sigma} = - \vec{a} \cdot \int \vec{v} \phi \times d\vec{\sigma}$

L.H.S = $\oint \vec{a} \phi \cdot d\vec{\lambda} = \vec{a} \cdot \int \phi d\vec{\lambda}$ $\vec{a}$ یک بردار ثابت است
 $\int \phi d\vec{\lambda} = \int_S d\vec{\sigma} \times \vec{v} \phi$

فرض کنید $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{p}$ که $\vec{a}$ یک بردار ثابت است.

R.H.S = $\int_S [\vec{v} \times (\vec{a} \times \vec{p})] \cdot d\vec{\sigma} = \int_S \{ (\vec{v} \cdot \vec{p})(\vec{a} \cdot d\vec{\sigma}) - (\vec{a} \cdot \vec{v})(\vec{p} \cdot d\vec{\sigma}) \}$

$\vec{v} \times (\vec{a} \times \vec{p}) = (\vec{p} \cdot \vec{v})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{v})\vec{p} - \vec{p}(\vec{v} \cdot \vec{a}) + \vec{a}(\vec{v} \cdot \vec{p})$

چون $\vec{a}$ ثابت است به مشتق آن صفر است.

R.H.S = $\vec{a} \cdot \int \{ (\vec{v} \cdot \vec{p}) d\vec{\sigma} - \vec{v}_p (\vec{p} \cdot d\vec{\sigma}) \} = - \vec{a} \cdot \int (d\vec{\sigma} \times \vec{v}) \times \vec{p}$

$(d\vec{\sigma} \times \vec{v}) \times \vec{p} = -\vec{p} \times (d\vec{\sigma} \times \vec{v}) = -d\vec{\sigma} (\vec{v} \cdot \vec{p}) + \vec{v}_p (\vec{p} \cdot d\vec{\sigma})$

۱۰.۸.۱۱ : $\vec{v} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{v})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{v})\vec{B} - \vec{B}(\vec{v} \cdot \vec{A}) + \vec{A}(\vec{v} \cdot \vec{B})$

اثبات : $\vec{v} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{v}_A \times (\vec{A} \times \vec{B}) + \vec{v}_B \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\vec{v}_A \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{v}_A \cdot \vec{A}) + \vec{A}(\vec{v}_B \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{v}_B \cdot \vec{A})$

$= (\vec{B} \cdot \vec{v})\vec{A} - \vec{B}(\vec{v} \cdot \vec{A}) + \vec{A}(\vec{v} \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \vec{v})\vec{B}$

$$L.H.S = \oint (\vec{a} \times \vec{r}) \cdot d\vec{\lambda} = \oint \vec{a} \cdot (\vec{r} \times d\vec{\lambda}) = \vec{a} \cdot \int \vec{r} \times d\vec{\lambda} = -\vec{a} \cdot \int d\vec{\lambda} \times \vec{r}$$

↓
ضرب ۰ و × را جایگزین کنیم

$$L.H.S = R.H.S \Rightarrow \int_S (\vec{a} \times \vec{\nabla}) \cdot \vec{r} = \oint d\vec{\lambda} \times \vec{r}$$