

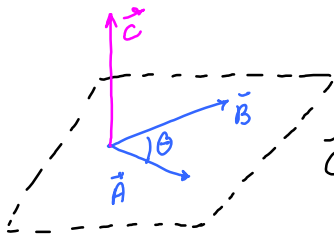
عبارت دوم: ضرب برداری ← ضرب
ضرب اسکالر و برداری سه گانه ضرب برداری سه گانه
تغییر هندسی

$$\vec{C} \equiv \vec{A} \times \vec{B}$$

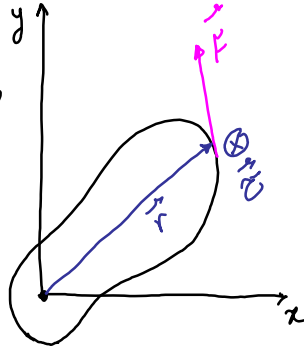
تغییر هندسی:

$$|\vec{C}| = C = AB \sin \theta$$

حجم از مآل و است راست بدست می آید



$$\vec{C} \perp \vec{A}, \vec{C} \perp \vec{B}$$



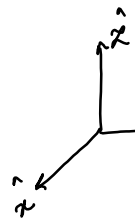
ضرب برداری یا خارجی

$$\vec{C} = \vec{r} \times \vec{F}$$

لنگر زاویه $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

خاصیت این ضرب:

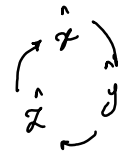
$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$



$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$$

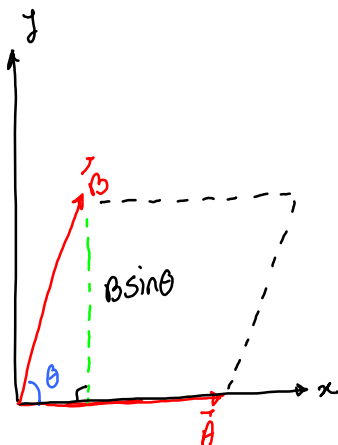
$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$



دست راست

تغییر هندسی



$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta = S_{\square}$$

ارتفاع متوازی الاضلاع

بردار حاصل: برداری که اندازه آن برابر با است
سطح است و جهت آن عمود بر صفحه $\vec{A}$ و $\vec{B}$ است

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

$$(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C}$$

$$\vec{A} \times (a\vec{B}) = a\vec{A} \times \vec{B} = (a\vec{A}) \times \vec{B}$$

تغییری: می خواهیم خصوصیات رو بر وجود داشته باشد:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \Rightarrow \begin{cases} C_x = A_y B_z - A_z B_y \\ C_y = A_z B_x - A_x B_z \\ C_z = A_x B_y - A_y B_x \end{cases} \Rightarrow C_i = A_j B_k - A_k B_j \quad i \neq j \neq k$$

روش دیگری نشان ضرب خارجی:

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{i} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} + \hat{j} (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \hat{k} (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

تعریف جبری

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = A_x (\vec{A} \times \vec{B})_x + A_y (\vec{A} \times \vec{B})_y + A_z (\vec{A} \times \vec{B})_z$$

$$= A_x (A_y B_z - A_z B_y) + A_y (A_z B_x - A_x B_z) + A_z (A_x B_y - A_y B_x) = 0$$

الف - راستا

تعریف هندسی: $\vec{C}$ به صفحه

$\vec{A}$ و $\vec{B}$ عمود است.

ب - عمودیت : $\vec{B} \cdot \vec{C} = \vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$

ب - عمودیت

تعریف هندسی: $\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$

تعریف جبری: $\hat{x} \times \hat{y} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{z}$

$$\hat{x} = (1, 0, 0)$$

$$\hat{y} = (0, 1, 0)$$

$$|\vec{C}| = AB \sin \theta$$

ج - اندازه تغییر هندسی:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \rightarrow C^2 = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = A^2 B^2 \sin^2 \theta = A^2 B^2 (1 - \cos^2 \theta)$$

$$\rightarrow (\vec{A} \times \vec{B})^2 = A^2 B^2 - A^2 B^2 \cos^2 \theta = A^2 B^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$$

تعریف جبری:

$$C^2 = (\vec{A} \times \vec{B})^2 = C_x^2 + C_y^2 + C_z^2 = \left\{ (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) - A_y^2 B_x^2 - A_x^2 B_y^2 - A_z^2 B_x^2 \right\}$$

$$- 2 \{ A_y B_y A_z B_z + A_x A_z B_x B_z + A_x A_y B_z B_y \}$$

$$\text{نتیجه‌گیری} = - (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)^2 = - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$$

$$\Rightarrow (\vec{A} \times \vec{B})^2 = A^2 B^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$$

$$C'_i = ? \sum a_{ij} C_j$$

آیا $\vec{C}$ بردار است؟

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \rightarrow C_i = A_j B_k - A_k B_j$$

$$A'_i = \sum a_{ij} A_j, B'_j = \sum a_{ij} B_j$$

$$C'_i = A'_j B'_k - A'_k B'_j = \sum_l a_{jl} A_l \sum_m a_{km} B_m - \sum_l a_{kl} A_l \sum_m a_{jm} B_m$$

$$= \sum_{l,m} A_l B_m (a_{jl} a_{km} - a_{kl} a_{jm}) \quad (I) \quad \text{اگر } l=m \Rightarrow a_{jm} a_{km} - a_{km} a_{jm} = 0$$

سوی مجانبی نظیر $A, B, \dots$ وجود ندارد.

$$\left. \begin{aligned} a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} &= a_{33} \\ a_{13} a_{21} - a_{23} a_{13} &= a_{32} \\ a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13} &= a_{31} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{روابط} \\ ** \\ \end{array}$$

فرض حل هر Z $\Rightarrow$ اندازه ϕ پارامتر.

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_{11} = \cos \phi & a_{13} = a_{31} = 0 \\ a_{12} = \sin \phi & a_{23} = a_{32} = 0 \\ a_{21} = -\sin \phi & a_{33} = 1 \\ a_{22} = \cos \phi & \end{array} \right.$$

از صبه اول.

$$a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = \cos^2 \phi - \sin \phi (-\sin \phi) = 1 = a_{33} \quad \checkmark$$

$$a_{13} a_{21} - a_{23} a_{13} = 0 = a_{32} \quad \checkmark$$

$$a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13} = 0 = a_{31} \quad \checkmark$$

اثبات کس روابط $**$ را فرض می‌خواهیم در:

$$C'_i = \sum_{\substack{l,m \\ l \neq m}} A_l B_m (a_{jl} a_{km} - a_{kl} a_{jm}) \quad \text{انتخاب: } i=3, j=2, k=1$$

$$C'_3 = \sum_l A_l B_l (a_{2l} a_{11} - a_{1l} a_{21}) + A_l B_2 (a_{2l} a_{12} - a_{1l} a_{22}) + A_l B_3 (a_{2l} a_{13} - a_{1l} a_{23})$$

$$= A_2 B_1 (a_{22} a_{11} - a_{12} a_{21}) + A_3 B_1 (a_{23} a_{11} - a_{13} a_{21}) + \dots + \dots + \dots + \dots$$

$a_{33} \quad a_{32}$

$$= a_{33} (A_1 B_2 - A_2 B_1) + a_{32} (A_3 B_1 - A_1 B_3) + a_{31} (A_2 B_3 - A_3 B_2) = \sum a_{3j} C_j$$

$C_3 \quad C_2 \quad C_1$

$$\Rightarrow C'_3 = \sum_j a_{3j} C_j \rightarrow C'_i = \sum_j a_{ij} C_j \quad \checkmark$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) \quad \text{ضرب اسکالر طاق}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = A_x (\vec{B} \times \vec{C})_x + \dots + \dots = A_x (B_y C_z - B_z C_y) + \dots + \dots$$

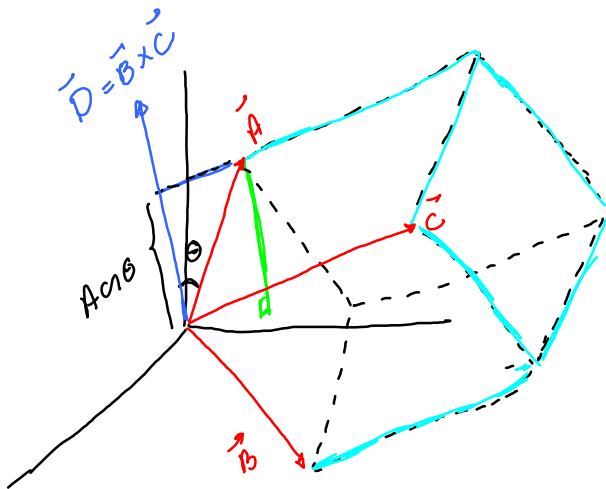
$$= B_x (A_z C_y - A_y C_z) + \dots + \dots = B_x (\vec{C} \times \vec{A})_x + B_y (\vec{C} \times \vec{A})_y + B_z (\vec{C} \times \vec{A})_z$$

$$= \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$$

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A} = \vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{A} \cdot \vec{C} \times \vec{B}$$

$$\text{ماتریس (رتبائی)} : \vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{A} \times \vec{B} = 0$$

تعبیر هندسی



$|\vec{B} \times \vec{C}| =$ مساحت متوازی الاضلاع

$$\vec{D} = \vec{B} \times \vec{C}$$

$\vec{A} \cdot \vec{D} = (A \cos \theta) D$: حجم متوازی السطوح

ارتفاع متوازی السطوح : تقویر A روی D

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \text{حجم متوازی السطوح که از } \vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \text{ تشکیل شده}$$

$$\vec{A} = \hat{x} + 2\hat{y} - \hat{z} \quad \text{مثال :}$$

$$\vec{B} = \hat{y} + \hat{z}$$

$$\vec{C} = \hat{x} - \hat{y}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = +4$$

* نتیجه :

$$\vec{A} \rightarrow -\vec{A} = \vec{A}'$$

$$\vec{A}' \cdot \vec{B}' \times \vec{C}' = -\vec{A} \cdot (-\vec{B} \times (-\vec{C})) = -\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}$$

$$\vec{B} \rightarrow -\vec{B} = \vec{B}'$$

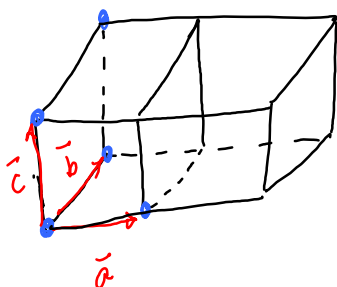
ضرب اسکالر سه گانه می تونه اسکالر است چون تحت انعکاس این علامت منفی می توره اما تحت چرخش ناورد است.

$$\vec{C} \rightarrow -\vec{C} = \vec{C}'$$

Pseudo-scalar

کاربرد ضرب سه گانه اسکالر

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ یک سببه شعری های نازنین و نزدیک به هم قرار می گیرند.



$$\vec{a}' = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}}$$

$$\vec{b}' = \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}}$$

$$\vec{c}' = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}} \quad \text{بردارهای سببه وارون}$$

$$\vec{a}' \cdot \vec{b}' = 0$$

$$\vec{a}' \cdot \vec{a}' = 1$$

$$\vec{a}' \perp \vec{b}, \vec{a}' \perp \vec{c}$$

$$P = h_k k$$

فضای وارون، فضای فوری، فضای k هم ناسیه می شود.

مثال ۱: $\hat{x} \times (\hat{x} \times \hat{y}) = \hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y}$

$(\hat{x} \times \hat{x}) \times \hat{y} = 0$

$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{x} + \hat{y} - \hat{z}$

ضرب برداری سه گانه $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$

مثال ۲: $\vec{A} = \hat{x} + 2\hat{y} - \hat{z}$

$\vec{B} = \hat{y} + \hat{z}$

$\vec{C} = \hat{x} - \hat{y}$

$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\hat{x} - \hat{z} = -\vec{B} - \vec{C}$

ضرب برداری سه گانه $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ ، بردارهای $\vec{A}$ ، $\vec{B} \times \vec{C}$ و $\vec{C}$ را در نظر بگیرید.

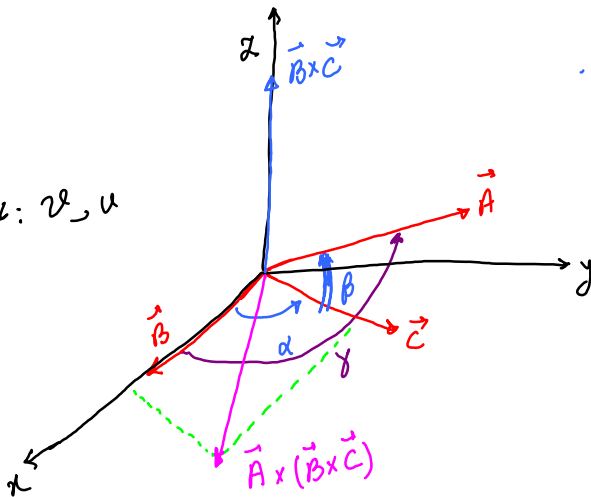
$\vec{B}$ و $\vec{C}$ در صفحه xy هستند.

$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = u\vec{B} + v\vec{C}$

که: v, u

$\vec{A} \cdot (\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})) = 0$

$\Rightarrow \vec{A} \cdot (\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})) = u\vec{A} \cdot \vec{B} + v\vec{A} \cdot \vec{C}$



فرض: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = w [\vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})]$ $\Rightarrow \begin{cases} u = w(\vec{A} \cdot \vec{C}) \\ v = -w(\vec{A} \cdot \vec{B}) \end{cases}$ $w=1$ است.

$\vec{B} \cdot \vec{C} = \cos \alpha$ $\vec{A} \cdot \vec{C} = \cos \beta$ $\vec{B} \cdot \vec{A} = \cos \gamma$

$(\vec{A} \times \vec{B})^2 = A^2 B^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$

$[\hat{A} \times (\hat{B} \times \hat{C})]^2 = \underbrace{\hat{A}^2}_1 (\underbrace{\hat{B} \times \hat{C}}_{\sin \alpha})^2 - [\hat{A} \cdot (\hat{B} \times \hat{C})]^2 = \underbrace{\sin^2 \alpha}_{1 - \cos^2 \alpha} - [\hat{A} \cdot (\hat{B} \times \hat{C})]^2$

$[\hat{A} \times (\hat{B} \times \hat{C})]^2 \stackrel{II}{=} w^2 \left[\underbrace{\hat{B}^2}_1 (\underbrace{\hat{A} \cdot \hat{C}}_{\cos^2 \beta})^2 + \underbrace{\hat{C}^2}_1 (\underbrace{\hat{A} \cdot \hat{B}}_{\cos^2 \gamma})^2 - 2 \underbrace{\hat{C} \cdot \hat{B}}_{\cos \alpha} \underbrace{(\hat{A} \cdot \hat{C})}_{\cos \beta} \underbrace{(\hat{A} \cdot \hat{B})}_{\cos \gamma} \right]$

$\Rightarrow [\hat{A} \cdot (\hat{B} \times \hat{C})]^2 = 1 - \cos^2 \alpha - w^2 [\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma]$

در رابطه اساسی قرار می دهیم:

$\Rightarrow w^2 = 1 \Rightarrow w = +1$

هم متناهی اطمینان