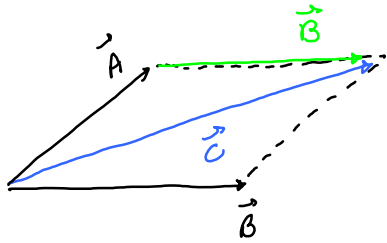
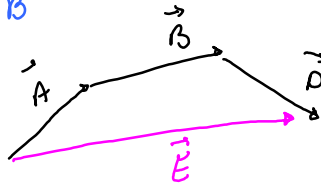


عبارت اول: فصل اول: آسانترین برداری مقدره دستگاه دکارتی چرخش در هر دو مختصات ← تعریف بردار تعریف فضای برداری ضرب نقطه‌ای

جمع بردارها



$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$



$$\vec{E} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{D}$$

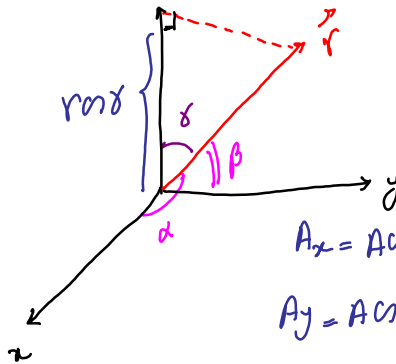
جمع بردارها ترتیب نپذیرد: $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$

منفی یک بردار:



تفریق بردارها: $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

مختصات صوری بردارها:



$$\vec{r} = (x, y, z)$$

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

$$A_x = A \cos \alpha \rightarrow x = r \cos \alpha$$

$$A_y = A \cos \beta \rightarrow y = r \cos \beta$$

$$A_z = A \cos \gamma \rightarrow z = r \cos \gamma$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$= r^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

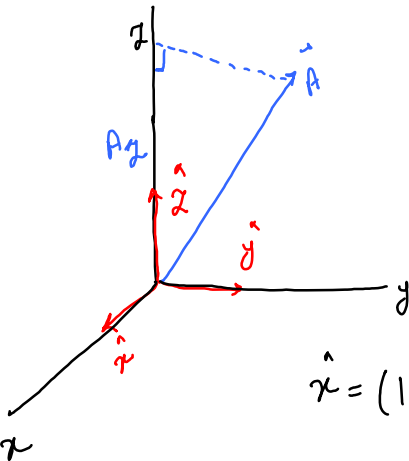
$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} : \text{اندازه یک بردار}$$



$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

بردار یکسره:

رشتهای مختصات دکارتی



$A_z \hat{z}$: برداری در جهت $\hat{z}$ با اندازه A_z

تفسیر بردار $\vec{A}$ روی $\hat{z}$

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$$

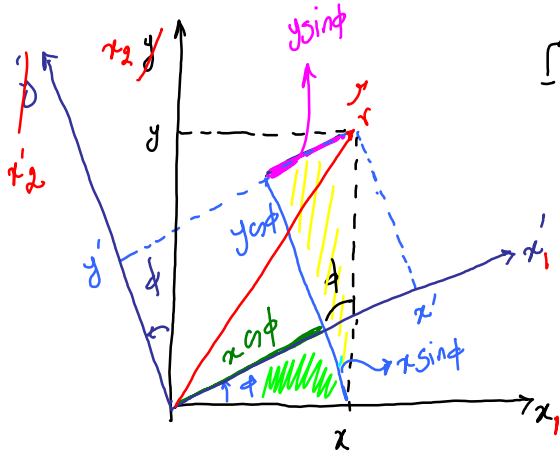
$$\vec{A} = \vec{0} \text{ (null vector)} \Leftrightarrow A_x = A_y = A_z = 0$$

$$\hat{x} = (1, 0, 0), \hat{y} = (0, 1, 0), \hat{z} = (0, 0, 1) : \text{بردار پایه}$$

تعریف انحصاری: اگر یک بردار چرخش در هر دو مختصات نسبت به اندازه باشد، یک بردار است.

تعریف بردارها: کمالاتی هستند که تمام چرخش در هر دو مختصات از توانش خاص تبعیت می‌کند.

مصفوفه دنگاه مختصات



$$\vec{r} = (x, y) \quad (\text{نقطه بدون پریم})$$

$$\vec{r} = (x', y') \quad (\text{نقطه پریم})$$

$$x' = x \cos \phi + y \sin \phi \quad *$$

$$y' = -x \sin \phi + y \cos \phi$$

* تمرین ۱: نشان دهید $|\vec{A}|$ با چرخش دنگاه مختصات عوض نمی شود.

* تمرین ۲: " جهت بردار $\vec{A}$ نیز تغییر نمی کند.

نسبت به ابعاد بالاتر

$$\begin{matrix} x \rightarrow x_1 \\ y \rightarrow x_2 \end{matrix} \quad \xrightarrow{*} \quad \begin{matrix} x'_1 = x_1 \cos \phi + x_2 \sin \phi & I \\ x'_2 = -x_1 \sin \phi + x_2 \cos \phi & II \end{matrix}$$

$$a_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$$

$$a_{11} = \cos(x'_1, x_1)$$

$$a_{12} = \cos(x'_1, x_2) = \cos(\bar{\theta}_2 - \phi)$$

$$a_{21} = \cos(x'_2, x_1) = \cos(\bar{\theta}_2 + \phi)$$

$$a_{22} = \cos(x'_2, x_2) = \cos \phi$$

$$\Rightarrow \text{رابطه ی عمومی: } x'_i = \sum_{j=1}^2 a_{ij} x_j \quad i=1,2 \Rightarrow \boxed{A'_i = \sum_{j=1}^2 a_{ij} A_j} \quad i=1, \dots, n$$

تعریف جدید برای a_{ij} ها

$$I: \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} = a_{11} \quad \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} = a_{12}$$

$$II: \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} = a_{21} \quad \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} = a_{22}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}}$$

بدانند روابط معکوس

$$I \times \cos \phi \rightarrow x'_1 \cos \phi = x_1 \cos^2 \phi + x_2 \cos \phi \sin \phi$$

$$II \times \sin \phi \rightarrow x'_2 \sin \phi = -x_1 \sin^2 \phi + x_2 \cos \phi \sin \phi$$

$$\text{تقریب: } x'_1 \cos \phi - x'_2 \sin \phi = x_1 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x'_1 \cos \phi - x'_2 \sin \phi \\ x_2 = x'_1 \sin \phi + x'_2 \cos \phi \end{cases}$$

$$\boxed{a_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}} \quad \leftarrow a_{ji} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j}, \quad A_i = \sum_j a_{ji} A'_j$$

$$a_{21} = \partial x_1 / \partial x'_2$$

$$\text{رابطه ی معکوس: } \begin{cases} x'_1 = x_1 \cos \phi + x_2 \sin \phi \\ x'_2 = -x_1 \sin \phi + x_2 \cos \phi \end{cases}$$

a_{ij} ها از هم مستقل نیستند

orthogonality: $\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j=k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$ (رابطه کرونکر)

$j=1, k=1 \rightarrow \sum_{i=1}^2 a_{i1} a_{i1} = a_{11} a_{11} + a_{21} a_{21} = \cos^2 \phi + (-\sin \phi)^2 = 1 = \delta_{11} \checkmark$

$j=2, k=1 \rightarrow \sum_{i=1}^2 a_{i2} a_{i1} = a_{12} a_{11} + a_{22} a_{21} = \sin \phi \cos \phi + \cos \phi (-\sin \phi) = 0 = \delta_{21} \checkmark$

اثبات رابطه تعاد در حالت عمومی:

$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \frac{\partial x_j}{\partial x_k} = \delta_{jk} \checkmark$

قضای برداری

تعریف میدان (Field): مجموعه‌ای از اشیاء است که با رویه خاصیت جمع و ضرب، روابط زیر برقرار باشد:

$\{F, +, \cdot\}$

$+: F \times F \rightarrow F$ و $\cdot: F \times F \rightarrow F$

$\mathbb{R}, \mathbb{C}$

- | | | |
|---|---|---|
| 1) $\forall \alpha, \beta \in F: \alpha \cdot \beta \in F$ | } | I: $\alpha + \beta \in F$ |
| 2) " : $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ | | II: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ |
| 3) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in F: \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ | | III: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ |
| 4) $\exists 1 \in F, \forall \alpha \in F: 1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$ | | IV: $\exists 0 \in F, \forall \alpha \in F: 0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$ |
| 5) $\forall \alpha \neq 0, \exists \alpha^{-1} \in F: \alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = 1$ | | V: $\forall \alpha \in F, \exists (-\alpha) \in F: \alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$ |
- خاصیت بخش: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

تعریف فضای برداری: $\{V, +, \cdot, \mathbb{R} \text{ یا } \mathbb{C}\}$ می‌تواند فضای برداری است اگر دارای خواص زیر باشد:

- | | |
|---|---|
| A1) $\forall v, v' \in V: v + v' \in V$ | A5) $\forall v \in V, \exists (-v) \in V: v + (-v) =$ |
| A2) " : $v + v' = v' + v$ | $(-v) + v = 0$ |
| A3) $\forall v, v', v'' \in V: v + (v' + v'') = (v + v') + v''$ | |
| A4) $\exists 0 \in V, \forall v \in V: 0 + v = v + 0 = v$ | |

ناوردائی ضرب الکارتیٹ پر مبنی

$$\vec{A} \xrightarrow{\text{پہچان}} \vec{A}' \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A}' \cdot \vec{B}'$$

$$\vec{B} \longrightarrow \vec{B}' \quad A'_i = \sum_j a_{ij} A_j \quad B'_i = \sum_k a_{ik} B_k$$

$$\vec{A}' \cdot \vec{B}' = \sum_i A'_i B'_i = \sum_i \sum_j a_{ij} A_j \sum_k a_{ik} B_k = \sum_{j,k} A_j B_k \sum_i \underbrace{a_{ij} a_{ik}} = \sum_{j,k} B_k A_j \delta_{jk}$$

$$\overset{\text{حالت خاص}}{=} \sum_k B_k (A_1 \delta_{1k} + A_2 \delta_{2k}) = B_1 (A_1 \delta_{11} + A_2 \delta_{21}) \quad \delta_{jk} : \text{نذرانہ پیمانہ}$$

$$+ B_2 (A_1 \delta_{12} + A_2 \delta_{22}) = B_1 A_1 + B_2 A_2 = \sum_j A_j B_j = \vec{A} \cdot \vec{B} \quad \checkmark$$