

حله نبردم: ماتریس برآینده زوایای دوسر ماتریس های همبسته دکانونی معرفی کردن

ماتریس های متعامد

$$A'_i = a_{ij} A_j \rightarrow a_{ik} a_{kj} = \delta_{ij} \quad \text{شرط متعامد}$$

$$\downarrow$$

$$\vec{A}' = R \vec{A} \Rightarrow R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ . & . & . \\ . & . & a_{33} \end{pmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{۹ مؤلفه دارد}$$

رابطه ماتریسی: $\vec{A}' = R \vec{A}$ ماتریس تبدیل

شرط متعامد ما ۹ رابطه می دهد (زو ک هر کدام $\sum_i a_{ij} a_{ij} = 1 \Rightarrow a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1$)

لیتوآمد از ۱ تا ۳ مقدار داشته باشند اما چون نسبت به تعریف اینها متعامد داریم، شرط متعامد کل ۹ رابطه مستقل می دهد.

بن ماتریس R دارای کل ۹-۶ مؤلفه برابر ۳ کمیت های مستقل دارد.

مثال رجاست روی دی:

$$\begin{aligned} A'_1 &= a_{11} A_1 + a_{12} A_2 \\ A'_2 &= a_{21} A_1 + a_{22} A_2 \end{aligned} \rightarrow \vec{A}' = R \vec{A} \rightarrow \begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

۴ مؤلفه $\rightarrow$ ماتریس مربعی

$$\sum_i a_{ik} a_{ij} = \delta_{kj} \rightarrow \text{تعداد روابط مستقل} = \frac{n(n+1)}{2} = 3$$

۴-۳=۱ $\Rightarrow$ ۱ کمیت مستقل کنونی های لازم است

بقیه زوایا ها از روی همین یک کمیت های بدست می آید.

$$(\tilde{A})_{ij} = \tilde{a}_{ij} = a_{ji}$$

ماتریس برآینده $\leftarrow$ transpose A^T

مثال: $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 2 & 0 & -i \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & 0 & 1 \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix}$

$$AB = C \quad A_{ij} B_{jk} = C_{ik}$$

$$(AB)_{ik} = C_{ik}$$

شرط متعامد: $a_{ik} a_{kj} = \delta_{ij} \Rightarrow \tilde{a}_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} \Rightarrow \tilde{A} A = 1 \rightarrow \tilde{A} A = A \tilde{A} = 1$

شرط متعامد

$$A A^{-1} = A^{-1} A = 1 \Rightarrow \tilde{A} = A^{-1}$$

* ماتریس معکوس آنست که ضرب خودش در برآینده آن برابر ماتریس واحد شود.

* " " " " که برآینده آن با خودش آن برابر باشد.

$$R \doteq \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow R^T \doteq \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$RR^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta + 0 & -\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta + 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta + \cos^2\theta + 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

فناپی (ویر) ← برای چرخش در سه بعد، احتیاج به سه کمترین‌های مستقل داریم که بازوهای (ویر) متغیر می‌شوند.

$$1 - (x_1, x_2, x_3) \xrightarrow[\text{به اندازه زاویه } \alpha]{\text{چرخش پاد ساعتی حول محور } x_3} (x'_1, x'_2, x'_3) \quad x'_3 = x_3$$

$$2 - (x'_1, x'_2, x'_3) \xrightarrow[\text{به اندازه زاویه } \beta]{\text{چرخش پاد ساعتی حول محور } x'_2} (x''_1, x''_2, x''_3) \quad x''_2 = x'_2$$

$$3 - (x''_1, x''_2, x''_3) \xrightarrow[\text{به اندازه زاویه } \gamma]{\text{چرخش پاد ساعتی حول محور } x''_3} (x'''_1, x'''_2, x'''_3) \quad x'''_3 = x''_3$$

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$R_x(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\gamma) R_y(\beta) R_z(\alpha) \rightarrow \text{رابطه ۴.۹۴ کتاب}$$

$$A_{13} = [R_z(\gamma) R_y(\beta) R_z(\alpha)]_{13} = [R_z(\gamma)]_{1i} [R_y(\beta)]_{ij} [R_z(\alpha)]_{j3} = B_{1i} C_{ij} D_{j3}$$

$$= B_{11} C_{1j} D_{j3} + B_{12} C_{2j} D_{j3} + B_{13} C_{3j} D_{j3}$$

$$= (B_{11} C_{11} D_{13} + B_{11} C_{12} D_{23} + B_{11} C_{13} D_{33}) + (B_{12} C_{21} D_{13} + B_{12} C_{22} D_{23} + B_{12} C_{23} D_{33})$$

$$= B_{11} C_{13} D_{33} = \cos\gamma (-\sin\beta) \times 1 = -\cos\gamma \sin\beta$$

ماتریس‌های معاندر 3×3 متغیر می‌دهند به نام $O(3)$. ماتریس‌های معاندر 3×3 با رتبه ۱ +، گروه $SO(3)$ را می‌سازند. ^{orthogonal}

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1-i & 0 \\ i & 0 & 3i \end{pmatrix} \rightarrow (A^T)^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1+i & 0 \\ -i & 0 & -3i \end{pmatrix} \leftarrow A^\dagger$$

Unitary ← هر دو دایمی
 Hermitian

$$\text{Sol: } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 2 & 1-i & 0 \\ 1 & 0 & 3i \end{pmatrix}$$

$i \rightarrow -i$ ↓

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -i \\ 2 & 1+i & 0 \\ 1 & 0 & -3i \end{pmatrix}$$

$$(A^*)^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1+i & 0 \\ -i & 0 & -3i \end{pmatrix} = A^T$$

$A \rightarrow A^*$ Complex Conjugate ← مزدوج مختلط

$A \rightarrow A^\dagger$ Adjoint ← (الحاصل مترس)

$$A^\dagger = (A^*)^T = (A^T)^*$$

ہائریں A کی ہائریں ہرمتی است، اگر $A^+ = A$

$A^+ = -A$ " " " " " " " " " " " "

$AA^T = A^T A = I \leftarrow A^{-1} = A^T$ "مقلوب" (معكوس)، "اثر"

“اگر داده‌های A حقیقی باشند، ماتریس‌های یفانی، همان ماتریس‌های متعام هستند.

$$(AB)^* = A^* B^* \quad \rightarrow \quad (AB)^T = B^T A^T$$

* ماترین های لسانی، طول، ارتفاع، تنه می دارند.

طول میں برابر : $\|v\| \equiv \sqrt{v^+ v}$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \rightarrow v^T = (v_1 \ v_2 \ v_3)$$

$$v^T v = (v_1 \ v_2 \ v_3) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = |v|^2$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{a}^\dagger = (a_1^* \ a_2^* \ a_3^*) \Rightarrow \vec{a}^\dagger \vec{a} = a_1^* a_1 + a_2^* a_2 + a_3^* a_3 = \|\vec{a}\|^2$$

$$\vec{a}^+ = (-i \quad 1 \quad 0) \leftarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

مثال: (تیز و ہر طور روی و راستی سے):

$$|\vec{\sigma}|^2 = (-i \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -ixi + 1x1 + 0 = +2 \quad \Rightarrow \quad |\vec{\sigma}| = \sqrt{2}$$

ثُمَّ جَاءَ سَمِيعٌ مِّنْ سِدِّ مَلَكَاتِي، طُورِ رَأْسَاتِ نَهْمِي دَارِئِي:

$$UU^T = U^T U = I$$

عكس : $y = Ux \rightarrow y^t = (Ux)^t = x^t U^t$

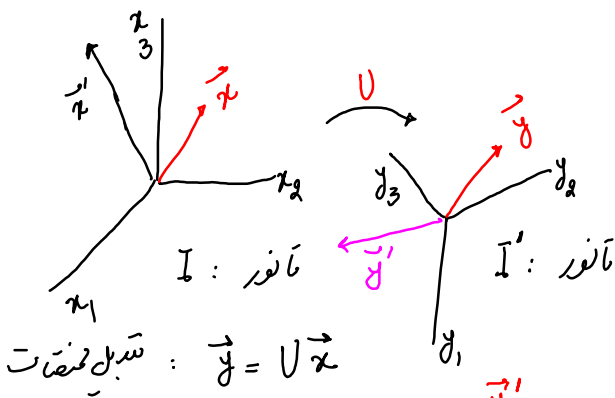
$$\rightarrow y^T y = (x^T \underbrace{V^T}) (\underbrace{V}_{\substack{\uparrow \\ \text{orthogonal}}}) x = x^T x$$

لغول: ماتریس‌ها تحت تبدیلات دستگاه مختصات چگونه عوض می‌شوند؟

دستگاه x : ماتریس I

دستگاه y : ماتریس I'

سؤال: ماتریس I' چگونه به ماتریس I مرتبط است؟



$$I \text{ ماتریس} : \vec{x}' = I\vec{x} \Rightarrow U\vec{x}' = UI\vec{x} \Rightarrow \vec{y}' = UIU^\dagger(U\vec{x}) \Rightarrow \vec{y}' = (UIU^\dagger)\vec{y}$$

$$y' = I' y$$

تبدیل ماتریس: $I' = UIU^\dagger$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ماتریس‌های پائولی ← برای اسپین $\frac{1}{2}$

* به عنوان تمرین نشان دهید:

$$(\sigma_i)^2 = 1, \quad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad (1) \quad \sigma_i\sigma_j = \sigma_k$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}1 \quad (2)$$

$$* (\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{B})1 + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

$$A_i B_j = (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$L.H.S = (\sigma_i A_i)(\sigma_j B_j) = \sigma_i \sigma_j A_i B_j = \underbrace{(i\epsilon_{ijk}\sigma_k A_i B_j)}_{\epsilon_{kij} A_i B_j \sigma_k} + \delta_{ij} A_i B_j 1 = i(\epsilon_{kij} A_i B_j) \sigma_k + \vec{A} \cdot \vec{B} 1$$

$$= i(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{\sigma} + \vec{A} \cdot \vec{B} 1$$

$$\begin{cases} (1) \rightarrow \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \\ (2) \rightarrow \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}1 \end{cases} \Rightarrow \sigma_i \sigma_j = i\epsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}1$$

قضیه کرونک ماتریس‌ها

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \longleftrightarrow \vec{p} = m\vec{v}$$

$$L_i = I_{ij} \omega_j$$

ماتریس گشتاور چرخشی مرتبه ۲

$$I_{xx} = \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2)$$

$$I_{xy} = - \sum m_i x_i y_i = I_{yx}$$

عناصر ماتریس گشتاور چرخشی (گشتاور چرخشی) $\rightarrow I_{ij} = I_{ji}$
ماتریس گشتاور متقارن است.

دستگاه مختصات را به گونه ای می چرخانیم که I_{xy} و بقیه عناصر غیر قطری صفر شوند.

$$L'_i = I'_{ij} \omega'_j = I'_{ij} \delta_{ij} \omega'_j = I'_{ii} \omega'_i \Rightarrow \vec{L}' = I' \vec{\omega}' \Rightarrow \vec{L} = I \vec{\omega}$$

معنی: $I'_{ij} = I'_{ji}$ (در این حالت حتماً).

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ . & . & . \\ . & . & I_{zz} \end{pmatrix} \xrightarrow{U} I' = \begin{pmatrix} I'_1 & 0 & 0 \\ 0 & I'_2 & 0 \\ 0 & 0 & I'_3 \end{pmatrix}$$

$I' = U I U^\dagger$: ماتریس جدید
 عناصر روی قطری
 ماتریس ماژور مقدار می‌گردد
 یک بردار $|n\rangle = (\alpha, \beta, \gamma)$ را در نظر بگیرید:

$$\langle n | I | n \rangle = \text{عدد}$$

$$(\alpha \ \beta \ \gamma) \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 + 2I_{xy}\alpha\beta + 2I_{xz}\alpha\gamma + 2I_{yz}\beta\gamma = \text{عدد}$$

حال یک بردار دلخواه برای بردارهای عناصر قطری را در نظر می‌دهیم:

$$\text{دسته‌های مختصات جدید: } |n'\rangle = R |n\rangle, \quad R^{-1} = \tilde{R}$$

$$\langle n' | = \langle n | \tilde{R} \quad \xrightarrow{\text{از راست در ضرب می‌کنیم}} \langle n' | R = \langle n | \tilde{R} R \xRightarrow{1} \langle n' | R = \langle n |$$

$$\Rightarrow \langle n | I | n \rangle = \langle n' | R I \tilde{R} | n' \rangle = (n'_1 \ n'_2 \ n'_3) \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n'_1 \\ n'_2 \\ n'_3 \end{pmatrix} = I'_1 n'^2_1 + I'_2 n'^2_2 + I'_3 n'^2_3$$

I' ها را همان انریس اصلی می‌نامند.
 ماتریس قطری $\rightarrow I'$: از سبب قاب

$$\Rightarrow I' = R I \tilde{R} \Rightarrow \tilde{R} I' = I \tilde{R} \Rightarrow (\tilde{R} I')_{ij} = (I \tilde{R})_{ij} \quad \textcircled{1}$$

رتیب در $\tilde{R}$ ضرب می‌کنیم

$$\tilde{R} = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] \quad \text{است که آن را به صورت مقابله می‌نویسیم}$$

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \\ R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ . & . & . \end{pmatrix}$$

این $\vec{v}_i$ ها به صورت بردارهای استونی $\vec{v}_i$ هستند. با این تقریب مثلاً مؤلفه R_{23} را می‌توان به صورت مؤلفه دوم از بردار $\vec{v}_3$ انتخاب کرد.

$$\text{L.H.S } \textcircled{1} = \tilde{R}_{ik} I'_{kj} = (\vec{v}_k)_i I'_j \delta_{kj} = (\vec{v}_k)_i I'_j$$

$$\text{R.H.S } \textcircled{1} = I_{ik} \tilde{R}_{kj} = I_{ik} (\vec{v}_j)_k$$

$$\Rightarrow I \vec{v}_j = I'_j \vec{v}_j$$

رابطه ماژور مقدار: $I \vec{v}_j = I'_j \vec{v}_j$
 ماتریس I و I' و بردار $\vec{v}_j$

$$\Rightarrow (I - I'_j 1) \vec{v}_j = 0$$

به این ترتیب به دست می‌آید که
 برای این که جواب غیر صفری داشته باشند، باید در شرایط ضرایب برابر صفر شود.

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} I_{11} - I & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} - I & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} - I \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{از اینجا } I \text{ تا } I \text{ می‌آید}$$

معادله است که به جای I ها λ قرار می‌دهند.

ماتریس
 $\det(A - \lambda 1) = 0$: شرط قطری کردن ماتریس
 ماژور مقدار

مثال 2: ویژه‌مقادیر و ویژه بردارهای ماتریس A را بیابید.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

$$-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} + 0 = 0 \Rightarrow -\lambda(\lambda^2 - 1) - (-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda\{\lambda^2 - 1 - 1\} = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \sqrt{2}, \lambda_3 = -\sqrt{2}$$

ویژه مقادیر

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

مرحله دوم: بدست آوردن ویژه بردارها

$$\lambda_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a + c = 0 \Rightarrow a = -c \\ b = 0 \end{cases}$$

انتخاب: $c = -1 \Rightarrow a = 1$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{طول بردار} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = \sqrt{2}a \\ a + c = \sqrt{2}b \\ b = \sqrt{2}c \end{cases}$$

انتخاب: $a = c = 1 \Rightarrow 2a = \sqrt{2}b \Rightarrow b = \sqrt{2}a = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{طول بردار} = \sqrt{1+2+1} = 2$$

$$\lambda_3 = -\sqrt{2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = -\sqrt{2}a \\ a + c = -\sqrt{2}b \\ b = -\sqrt{2}c \end{cases}$$

انتخاب: $a = c = 1, b = -\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \vec{v}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس‌های هرمیتی حقیقی هستند.

همه مقادیر ویژه حقیقی هستند.

کلیک کنید: $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0$ (i ≠ j) بردارهای ویژه ماتریس های همبسته برهم عمودند.

$$U = (\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow UAU^T = A' \rightarrow \text{این رابطه را هم می‌نویسند!} \quad \text{مفردی}$$

ماتریس متباین

شکل ۲:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{\text{نضرب سطران}} -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda(\lambda^2 - 1) - (-\lambda - 1) + (1 + \lambda) = 0 \Rightarrow -\lambda(\lambda^2 - 1) + \lambda + 1 + 1 + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + \lambda + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda = -1 \quad \text{یکی از جوابهاست}$$

$$\begin{array}{r} \lambda^3 - 3\lambda - 2 \quad | \quad \lambda + 1 \\ - \lambda^3 + \lambda^2 \\ \hline -\lambda^2 - 3\lambda - 2 \\ - -\lambda^2 - \lambda \\ \hline -2\lambda - 2 \\ - -2\lambda - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)^2(\lambda - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$$

وقتی ویژه مقادیر با هم برابر باشند، سهمین داریم. در اینجا چون دو ویژه مقدار با هم برابرند، پس سهمین دوگانه داریم.

حال ویژه بردارهای را می‌یابیم:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\text{مقادیر ویژه مقدار: } A\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b + c = -a \\ a + c = -b \\ a + b = -c \end{cases} \rightarrow a + b + c = 0 \Rightarrow \text{انتخاب: } a = 0, b = 1, c = -1$$

با این انتخاب بردار همگانه برآورده می‌شوند.

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

این ویژه بردار

$$\lambda_3 = 2 \rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow A\vec{v}_3 = \lambda_3 \vec{v}_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b + c = 2a \\ a + c = 2b \\ a + b = 2c \end{cases} \rightarrow \text{انتخاب: } a = 1, b = 1, c = 1 \Rightarrow \vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

این ویژه بردار

ماتریس A ، یک ماتریس 3×3 است. می‌توانیم به سادگی بردار متعلق داشته باشد. تاکنون از ویژگی بردار رانیت آورده ایم. بردار هم را خودمای درست
برای بردار $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ معین کنیم:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_3 = (0 \ 1 \ -1) \times (1 \ 1 \ 1)$$

$$\vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{x}(1 - (-1)) - \hat{y}(0 - (-1)) + \hat{z}(0 - 1) = 2\hat{x} - \hat{y} - \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, |\vec{v}_2|^2 = 4 + 1 + 1 = 6$$

مثال ۳:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \det |A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \text{معادله متناهی:} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -ib = a \\ ia = b \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{انتخاب: } a=1, b=i \Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{v}_1|^2 = \vec{v}_1^\dagger \vec{v}_1 = (1 \ -i) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 2$$

(نمونه بردار)

$$\lambda_2 = -1 \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \text{معادله متناهی:} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -ib = -a \\ ia = -b \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{انتخاب: } a=1, b=-i \Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

می‌توانیم چک کنیم که بردارهای $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ برهم عمودند
چون ویژگی بردارهای یک ماتریس هرسی هستند.