

مجلس روزار هم: در شبانه دما ترس ها معادلات حفظ کل و دما ترس ها ← دما ترس ها
 ماتریس های مقاری در (Trace) جایگزین ماتریس مکتوب ماتریس های مقاری ← مقایسه

$$\epsilon_{ij} = (j-i) \rightarrow \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$$

$$\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = -1$$

$$\epsilon_{ijk} = \frac{1}{2} (j-i)(k-i)(k-j)$$

$$\epsilon_{112} = 0 \quad \epsilon_{123} = \frac{1}{2} (2-1)(3-1)(3-2) = 1$$

$$\epsilon_{ijkl} = \frac{1}{6} (j-i)(k-i)(l-i)(k-j)(l-j)(l-k)$$

$$\epsilon_{a_1 \dots a_n} = \prod_{i=1}^{n-1} \left[\frac{1}{i!} \prod_{j=i+1}^n (a_j - a_i) \right] = \frac{1}{(n-1)!} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0 \end{cases}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}_{n \times n} = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \dots a_i b_j c_k \dots$$

در متون یک آرایه مربعی $n \times n$ از عدد است.

تعداد سطرها و ستونها برابرند

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \sum_i \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k \rightarrow \text{مجموعه تمام}$$

$$= \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \sum_i (\epsilon_{i11} a_i b_1 c_1 + \epsilon_{i21} a_i b_2 c_1 + \epsilon_{i31} a_i b_3 c_1) + \dots$$

مجلس سوم: در شبانه دما ترس ها

معادلات حفظ کل

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$: معادلات برقرار هستند (جوابهای بدیهی)

لرزش دانشجو جواب غیر بدیهی برای دستگاه معادلات چیست؟

$$= \overset{-1}{\underbrace{\epsilon_{321}}_{} a_3 b_2 c_1} + \overset{+1}{\underbrace{\epsilon_{231}}_{} a_2 b_3 c_1} + \dots + \dots \rightsquigarrow \text{مجموعه صفراست}$$

$$= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

$$= +a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^3 \underbrace{(-1)^{j+1}}_{\text{رسمیاتی برج}} a_j \underbrace{M_{j1}}_{\text{مطلوبه جاده شده}} = \sum_{j=1}^3 a_j \underline{C_j}$$

فصل در مسائل :

۱۔ اگر حاجی دوسرا سال تک عرصہ نورالرمضانِ تعمیرِ علامت می دھد۔

۲- در میان بابو و رضا در تون کن برای صفر است.

۱- اگر تمام عناصر یک سطر یا یک ستون صفر باشند، در میان صفهاست.

۲- اگر " " " " در می شامپا ضرب بوفند، کل در میان در آن شامپا ضرب می‌آور.

٥- الرمز في (زيد بن عمر) ، اية من عمر (سرك) (عمر اصفهاني نعيم ، در مسائل تفسير عن لفظ

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ :

$$x_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \textcircled{f} \begin{vmatrix} a_1 x_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 x_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 x_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \textcircled{g} \begin{vmatrix} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 & a_2 & a_3 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 & b_2 & b_3 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \textcircled{h} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 D_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow \text{حزب برتر} \\ D_3 = 0 \rightarrow x_1 \text{ ها نزدیک صفر نیستند} \end{cases}$$

* کڑی داسنِ حبوبِ خیرِ بدلی استقامتِ باہر درمیانِ ضرایبِ صفر بار۔

معادلات خطی نامعین: هم‌اندازه‌ها و مجهول‌ها را نسبت می‌آوریم:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_4 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = b_4 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = c_4 \end{cases}$$

$$x_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 & a_2 & a_3 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 & b_2 & b_3 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_4 & a_2 & a_3 \\ b_4 & b_2 & b_3 \\ c_4 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_2 & a_3 \\ b_4 & b_2 & b_3 \\ c_4 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

درمیان ضرایب

اگر در میان ضرایب صفر بود، جوابی وجود ندارد.

اگر " " " " و در میان صفر هم صفر بود، می‌توانیم برای x ها جواب داشته باشیم، اما از ما جواب بخواهیم.

مثال: روبن کاغذ

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 11 \\ 2x + 3y + z = 13 \\ x + y + 4z = 12 \end{cases} \rightarrow D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$$

درمیان متغیر نسبت می‌آوریم

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3$$

نسبت با 0:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 2 & 1 \\ 13 & 3 & 1 \\ 12 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{18} = 1$$

نسبت کاغذ

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 \times (-3/2) + 3 & 3 \times (-3/2) + 2 & 1 \times (-3/2) + 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

① $(-3/2)$ برابر سطر دوم + سطر اول

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5/2 & -1/2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5/2 & -1/2 \\ (-3) \times 1 + 3 & 1 \times (-3) + 2 & 4 \times (-3) + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & -11 \end{vmatrix}$$

② (-3) برابر سطر سوم + سطر اول

③ $(-5/2)$ برابر ضریب + مضروب :

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 27 \end{vmatrix} = 3 \times (-5/2) \times 27 = \dots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y + z = 11 \\ 2x + 3y + z = 13 \\ x + y + 4z = 12 \end{cases} \xrightarrow{\text{بار دوم حذف}} \begin{cases} 3x + 2y + z = 11 \\ -5/2 y - 1/2 z = (-3/2) \times 13 + 11 = -17/2 \\ 27z = 12 \times (-3) + 11 = -25 \end{cases}$$

① $(-3/2)$ برابر ضریب + مضارب

⑦ (-3) برابر ضریب + مضارب

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y + z = 11 \Rightarrow x = 1 \\ -5/2 y - 1/2 z = -17/2 \Rightarrow y = 3 \\ 27z = (-5/2) \times (-25) + (-17/2) = 54 \Rightarrow z = 2 \end{cases}$$

③ $(-5/2)$ برابر ضریب + مضارب

مارکس ها یک نوع ثابت یا غیر متغیر هستند

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \phi + x_2 \sin \phi \\ x'_2 &= x_1 (-\sin \phi) + x_2 \cos \phi \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\vec{r}' = A \vec{r}$

ket: $| \rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = |x' \rangle$

بردارهای ستونی 1×1

bra: $\langle | \Rightarrow (x'_1 \ x'_2)_{1 \times 2} = \langle x' |$

بردارهای سطری $1 \times n$

$$\langle A | B \rangle = (A_1 \ A_2 \ A_3)_{1 \times 3} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}_{3 \times 1} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = \vec{A} \cdot \vec{B} = \text{انگس}$$

انگس: 1×1

$$|B \rangle \langle A| = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}_{3 \times 1} (A_1 \ A_2 \ A_3)_{1 \times 3} = \begin{pmatrix} B_1 A_1 & B_1 A_2 & B_1 A_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_3 A_1 & B_3 A_2 & B_3 A_3 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \text{عکس}$$

- ماتریس یک (1): در هر ماتریس ضرب شود، همان را می دهد.

$$A1 = 1A = A, \quad 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نمادهای استاندارد میباشند $\rightarrow i \neq j : 0$
 $\rightarrow i = j : 1$

$$(1)_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

- اگر ضرب دو ماتریس برابر ماتریس صفر شود، لزومی ندارد که یک یک آنها ماتریس صفر باشند.

مثال: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

3.2.6: اگر $AB = 0$ ، معادله ای که از ماتریس ها دارای درجه یان صفر است.

$$C = AB \rightarrow \det C = \det A \cdot \det B$$

$\downarrow$ $0 = \det 0 = \det A \cdot \det B \Rightarrow |A| \cdot |B| = 0 \Rightarrow |A| = 0 \text{ یا } |B| = 0$

تجربیه به همراهی!

- اگر A یک ماتریس $n \times n$ با $|A| \neq 0$ باشد، یک ماتریس وارون A^{-1} وجود دارد، بطوریکه:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \rightarrow (ABCD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

تجربیه: $CC^{-1} = I \Rightarrow AB = C \Rightarrow (AB)(AB)^{-1} = AB B^{-1}A^{-1} = I \checkmark$

$$A \otimes B = C$$

ضرب مستقیم direct product

فرض کنید A یک ماتریس $m \times m$ و B یک ماتریس $n \times n$ است. رابطه ی عبارت، C یک ماتریس $mn \times mn$ می باشد.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} & a_{12} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ a_{21} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} & a_{22} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}_{2 \times 1} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} x_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ y_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}_{4 \times 1} = \begin{pmatrix} x_0 x_1 \\ x_0 y_1 \\ y_0 x_1 \\ y_0 y_1 \end{pmatrix}$$

سپینوردینگ $\rightarrow$ زادت $\frac{1}{2} = \text{spin}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow A_{ij} = a_{ij} \delta_{ij} \text{ (no summation)}$$

Diagonal matrix

ماتریس‌های قطری

حالتی که در آن A قطری است: $\text{diag } A = [a_{11} \ a_{22} \ a_{33}]$

* اگر A و B هر دو قطری باشند: $AB = BA$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Tr } A = a_{11} + a_{22} = a_{ii}$$

Trace ← جمع عناصر روی قطر اصلی

در گرفتن یک یک عنصر است:

$$\text{Tr}(A \pm B) = \text{Tr } A \pm \text{Tr } B$$

اگر $AB \neq BA$

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

اثبات: $\text{Tr}(AB) = (AB)_{ii} = \sum_k A_{ik} B_{ki} = \sum_k \underbrace{A_{ik} B_{ki}}_{\text{مقدار}} = B_{ki} A_{ik} = (BA)_{kk} = \text{Tr}(BA)$

در ماتریس‌ها تحت جرفتن دوره‌ای نامرط است: $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB) = \text{Tr}(BCA)$

$$[A, B] = AB - BA$$

اگر $[A, B] = 0 \rightarrow AB = BA$

Commutator جابجایی

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z$$

باید شرکت دارند $\rightarrow$ ماتریس‌ها جابجا می‌گیرند

$[L^2, L_z] = 0 \rightarrow |l, m\rangle \rightarrow$ هائف‌های لری Y_{lm}
 m : عدد کوانتومی مغناطیسی $\rightarrow$ عدد کوانتومی مداری l

ماتریس معکوس وقتی وجود دارد که $|A| \neq 0$

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I \rightarrow (A^{-1})_{ji} = \frac{C_{ij}}{|A| \neq 0}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$|A| = 18 \neq 0 \rightarrow$ وارون ماتریس وجود دارد

مثال:

$$(A^{-1})_{11} = \frac{1}{|A|} C_{11} = \frac{1}{18} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{12-1}{18} = \frac{11}{18}$$

$$(A^{-1})_{21} = \frac{1}{18} C_{12} = \frac{1}{18} (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{-1}{18} (8-1) = \frac{-7}{18}$$

چیزی که از حذف سطر ۱ و ستون ۲ میماند

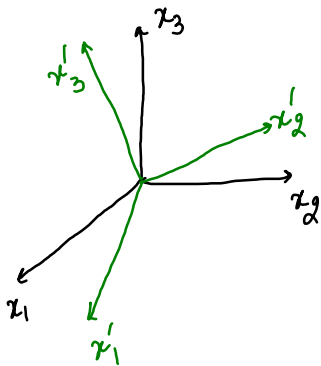
$$(A^{-1})_{13} = \frac{1}{18} C_{31} = \frac{1}{18} (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2-3}{18} = -\frac{1}{18}$$

مثال درجای آخر:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \sigma_2 \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [\sigma_1, \sigma_2] = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} = 2i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2i \sigma_3$$



orthogonal ماتریسهای متعام
کسینوسی هادی:

$$\text{با توجه به: } a_{ij} = \cos(x'_i, x_j) = \hat{x}'_i \cdot \hat{x}_j$$

$$\cos(x'_1, x_1) = a_{11}, \quad \cos(x'_2, x_1) = a_{21}, \quad \dots$$

$$x'_1 = a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + a_{31} x_3$$

$$x'_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3$$

$$x'_3 = \dots$$

$$\Rightarrow x'_i = a_{ij} x_j$$

انتگرال زده با نسبت جیب و انوسی هم با زده کنار آن برابر است.

$$|\vec{r}'| = |\vec{r}| : \text{طول بردار تحت مجزئ دستگاه مختصات ثابت است}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\downarrow$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \Rightarrow |\vec{r}|^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2$$

تحت مجزئ طری این اتفاق می افتد؟

چون نوع تبدیلی طول بردار را ثابت نمانده دارد.

$$\sum_i x_i'^2 = \sum_i x_i' x_i' = \sum_i \sum_j a_{ij} x_j \sum_k a_{ik} x_k = \sum_j \sum_k x_j x_k \sum_i a_{ij} a_{ik} \stackrel{\text{باید}}{=} \sum_j x_j^2$$

میزد = باید

$$\Rightarrow \sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \quad \text{شرط لازم}$$

تبدیلی که از خاصیت بالا برای لند، تبدیلات معام هستند.

* دمای کرونش در یک جعبه، اندر ها را به هم کرده و جعبه را برای طرد.