

مباحثه: مادی-میدان مآنورهای دوگان مآنورهای خاص دیگر مآنورهای غیردوگانی مآنور مرتبه

Levi-Civita symbol $\rightarrow \epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{جابجایی زوج} \\ -1 & \text{فرد} \\ 0 & \text{اگر دو اندیس برابر باشند} \end{cases}$

$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1$
 $\epsilon_{213} = \epsilon_{321} = \epsilon_{132} = -1$
 $\epsilon_{112} = \epsilon_{111} = \epsilon_{122} = \dots = 0$

فضای n بعدی n مرتبه مآنور مرتبه n برای N^n مؤلفه است. پس ϵ_{ijk} یک مآنور مرتبه 3 است دارای $3^3 = 27$ مؤلفه است.

$\hat{e}_i \cdot (\hat{e}_j \times \hat{e}_k) = \epsilon_{ijk} \Rightarrow i=1, j=2, k=3 : \epsilon_{123} = \hat{x} \cdot (\hat{y} \times \hat{z}) = \hat{x} \cdot \hat{x} = 1$

مؤلفه های (n) مآنورهای (n) مآنور مرتبه 3 : $i=2, j=1, k=3 : \epsilon_{213} = \hat{y} \cdot (\hat{x} \times \hat{z}) = \hat{y} \cdot (-\hat{y}) = -1$

بالا به پایین : $i=1, j=1, k=2 : \epsilon_{112} = \hat{x} \cdot (\hat{x} \times \hat{y}) = (\hat{x} \times \hat{x}) \cdot \hat{y} = 0$

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \Rightarrow C_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2 = \epsilon_{123} A_2 B_3 + \epsilon_{132} A_3 B_2$

حالت کلی : $C_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$

$\rightarrow C_2 = \epsilon_{2jk} A_j B_k = \epsilon_{2j1} A_j B_1 + \epsilon_{2j2} A_j B_2 + \epsilon_{2j3} A_j B_3$

$= \epsilon_{211} A_1 B_1 + \epsilon_{221} A_2 B_1 + \epsilon_{231} A_3 B_1$

$+ \epsilon_{212} A_1 B_2 + \epsilon_{222} A_2 B_2 + \epsilon_{232} A_3 B_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3$ ✓

$C_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k \xrightarrow{\text{رشته جابجایی}} C'_i = \epsilon'_{ijk} A'_j B'_k$

$A'_j = -a_{jl} A_l$

$C'_i = +a_{in} C_n$

$B'_k = -a_{km} B_m$

$\xrightarrow{\text{در نتیجه}} a_{in} C_n = \epsilon'_{ijk} (-a_{jl} A_l) (-a_{km} B_m) \Rightarrow \epsilon_{nlm} a_{in} = \epsilon'_{ijk} a_{jl} a_{km} \xrightarrow{\times a_{jp} a_{kq}}$

$\Rightarrow \epsilon_{nlm} a_{in} a_{jp} a_{kq} = \epsilon'_{ijk} a_{jl} a_{jp} a_{km} a_{kq} \rightarrow \epsilon'_{ijk} = a_{in} a_{jl} a_{km} \epsilon_{nlm}$ ✓

مآنورهای دوگان برای مآنور مرتبه 3 مادی متعلق به فضای 3 بعدی یک مآنور دوگان به شکل زیر تعریف می شود:

مآنور مرتبه 3 : $C_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} C_j C_k$

مآنور مرتبه 3 : $C_i \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} C_j C_k$

$\epsilon_{jmn} \leftarrow$ مآنور مرتبه 3

$2 \times 2 = 4 \leftarrow m=n, j=k \rightarrow 2 \times 2 = 4$

$$C_1 = \frac{1}{2} [\epsilon_{123} C_{23} + \epsilon_{132} C_{32}] = \frac{1}{2} [C_{23} - C_{32}] = C_{23} \Rightarrow \vec{C} = (C_{23}, C_{31}, C_{12})$$

تانسورهای متقارن مرتبه ۲: $C_{jk} = -C_{kj} \rightarrow C_{ij} = -C_{ji} \Rightarrow C_{ii} = 0$

مصفای ۳ مؤلفه متقارن

$$C = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} \\ -C_{12} & 0 & C_{23} \\ -C_{13} & -C_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

$F_{\mu\nu}$: تانسور مرتبه ۲ فضای ۴ بعدی $\rightarrow 2^4 = 16$ مؤلفه

EM: تانسور مرتبه ۲ متقارن: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ $A_\mu = (\varphi, \vec{A})$ $x_\mu = (ct, x, y, z)$

۴ بعدی با ۳ متغیر $F_{\nu\mu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu = -F_{\mu\nu}$ $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ $p_\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z)$

عنا روی مقاصد هستند $\rightarrow$ تانسور درون: $\tilde{F}_{\mu\nu}$

$16 - 4 = 12$

همچون تانسورهای متقارن داریم بن مقصد ۴ مؤلفه متقارن داریم.

شماره: $V = \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} V^{ijk} \rightarrow$ شماره دیگر: $H = \frac{1}{4!} \epsilon_{ijkl} H^{ijkl}$

فضای ۴ بعدی $\epsilon_{ijkl} = (-1)^4 \epsilon_{klij}$

$$\epsilon_{ijk} \dots \epsilon_{mnl} \dots \equiv \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{il} & \dots \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{jl} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

مثال ۲.۹.۴: $\epsilon_{ijk} \epsilon_{pqk} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{pqm} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{km} \end{vmatrix} = \delta_{kp} (\delta_{iq} \delta_{jk} - \delta_{ik} \delta_{jq}) - \delta_{kq} (\delta_{ip} \delta_{jk} - \delta_{ik} \delta_{jp}) + \delta_{km} (\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp})$$

$\delta_{kk} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33}$

$$= \delta_{iq} \delta_{jp} - \delta_{ip} \delta_{jq} - (\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}) + \delta_{km} (\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp})$$

$$= 2 (\delta_{iq} \delta_{jp} - \delta_{ip} \delta_{jq}) + 3 (\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}) = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}$$

* تمرین: (رئیس فضای دو بعدی) (اقلیدس) مولفه‌های یک تانور مرتبه ۲ مورد توجه منصات دکارتی به صورت زیر است:

$$A_{11} = x^2, \quad A_{12} = A_{21} = xy, \quad A_{22} = y^2$$

مولفه‌های این تانور را در دستگاه قطبی بنویسید.

تانورهای کاغذی

تانور مرتبه ۲

$$A^{ij} \xrightarrow{\text{ادغام}} A^{ii} = \text{اثر}$$

$$A^{ij} = \frac{1}{2} (\underbrace{-j + A^{ij}}_{\text{متقارن}}) + \frac{1}{2} (\underbrace{A^{ij} - A^{ji}}_{\text{ماتریس متقارن}}) = B^{ij} = C^k$$

$$\vec{C} = (C_{23}, C_{32}, C_{12})$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $C_1 \quad C_2 \quad C_3$

$$A^{ij} = \frac{1}{2} (A^{ij} + A^{ji}) + C^k - \frac{1}{3} A \delta^{ij} + \frac{1}{3} A \delta^{ij}$$

$$S^{ij} = \frac{1}{2} (A^{ij} + A^{ji}) - \frac{1}{3} A \delta^{ij} \quad \text{تانور متقارن}$$

$$\text{Trace } S^{ij} = S^{ii} = \frac{1}{2} (A^{ii} + A^{ii}) - \frac{1}{3} A \delta^{ii} = A^{ii} - \frac{1}{3} A \times 3 = A^{ii} - A^{ii} = 0$$

$\sum_{i=1}^3 \delta^{ii} = \delta^{11} + \delta^{22} + \delta^{33} = 3$

$$S = \begin{pmatrix} S^{11} & S^{12} & S^{13} \\ S^{21} & S^{22} & S^{23} \\ S^{31} & S^{32} & S^{33} \end{pmatrix} \rightarrow \text{همواره متقارن}$$

تایید تانور متقارن مرتبه ۲ بدون درایت.

$$S^{11} + S^{22} + S^{33} = 0 \quad \text{traceless}$$

$$S^{11} = -(S^{22} + S^{33})$$

$$\Rightarrow A^{ij} = S^{ij} + C^k + \frac{1}{3} A \delta^{ij}$$

$\downarrow$
 $9 = 6 + 3 + 1$

تایید تانور مرتبه ۲ متقارن با مولفه

C^k : " " ۱ با ۳ مولفه

A : " " صفر با ۱ مولفه

تانورهای غیر دکارتی $\leftarrow$ تانور مرتبه ۲

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i \cdot \sum_j \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} dq_j = \sum_{i,j} g_{ij} dq_i dq_j$$

$$d\vec{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i$$

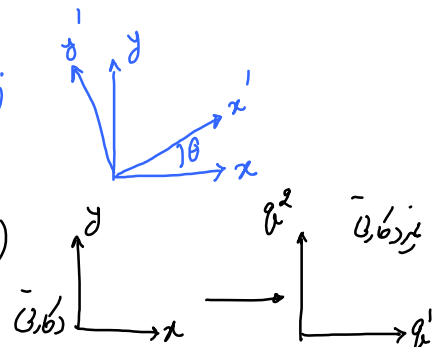
منصات مختصم یافته

$$g_{ij} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}$$

$$A'_i = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} A_j$$

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} dq^i \quad ; \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} = \vec{e}_i$$

(basis vector) بردار پایه



$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} = h_i \hat{q}_i$$

no summation
بردار

نقطه بردار به بردار دیگر فقط در دو ضرب مقادیر است. $\hat{q}_i$ $\hat{q}_j$ $\hat{q}_i \cdot \hat{q}_j = \delta_{ij}$

①, ②

$$\vec{E}_r = \hat{r} \leftarrow \vec{E}_r = h_r \hat{r}, h_r = 1$$

$$\vec{E}_\theta = r \hat{\theta} \leftarrow \vec{E}_\theta = h_\theta \hat{\theta}, h_\theta = r$$

$$\vec{E}_\phi = r \sin \theta \hat{\phi} \leftarrow \vec{E}_\phi = h_\phi \hat{\phi}, h_\phi = r \sin \theta$$

$$\Rightarrow \vec{E}_i \cdot \hat{q}_j = h_i \delta_{ij}$$

بردارهای هم بردار با بردار در فضاهای عام

الف - بردارهای با بردار

$$x^i = x^i(q^j) \rightarrow \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{matrix} x^i \rightarrow (x, y, z) \\ q^j \rightarrow (r, \theta, \phi) \end{matrix}$$

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} dq^j$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial x}{\partial z} dz$$

$$\text{بردار با بردار: } \vec{V}^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} V^j \Rightarrow \vec{V} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^j} \right) V^j \Rightarrow \vec{V} = \vec{E}_j V^j$$

بردار با بردار هم بردار

ب - بردارهای هم بردار

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial q^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial q^j} \rightarrow V_i = \frac{\partial q^j}{\partial x^i} V_j \Rightarrow \vec{V} = \vec{E}^j V_j$$

بردار با بردار هم بردار

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \sum_{ij} \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}}_{\vec{E}_i} \cdot \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^j}}_{\vec{E}_j} dq^i dq^j = g_{ij} dq^i dq^j$$

$$\Rightarrow g_{ij} = \vec{E}_i \cdot \vec{E}_j$$

تألف مرتب ۱

$$g_{ij} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^j} = \frac{\partial x^l}{\partial q^i} \frac{\partial x^l}{\partial q^j}$$

$$g^{jk} = \frac{\partial q^j}{\partial x^m} \frac{\partial q^k}{\partial x^m} \Rightarrow g_{ij} g^{jk} = \frac{\partial x^l}{\partial q^i} \frac{\partial x^l}{\partial q^j} \frac{\partial q^j}{\partial x^m} \frac{\partial q^k}{\partial x^m} = \frac{\partial x^l}{\partial q^i} \frac{\partial q^k}{\partial x^m} = \frac{\partial x^l}{\partial x^m} = \delta^l_m$$

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$$

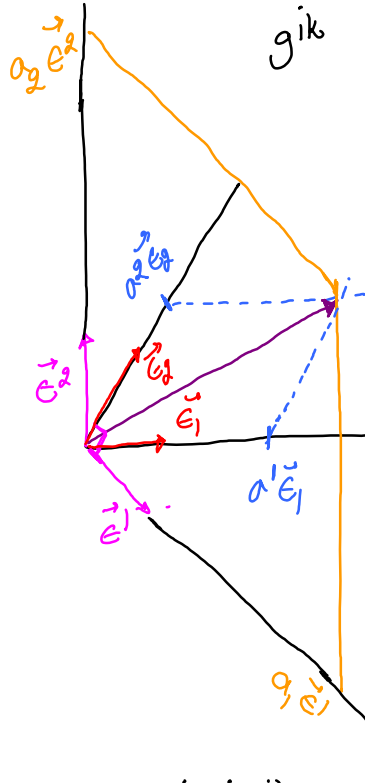
$$\Leftarrow = \frac{\partial q^k}{\partial q^i} = \delta_i^k$$

اگر متریک را می‌بینیم:

$$g_{ij} \vec{e}_j = \vec{e}_i \xrightarrow{x \vec{e}^k} g_{ij} \vec{e}_j \cdot \vec{e}^k = \underbrace{\vec{e}_i \cdot \vec{e}^k}_{g_{ik}} \Rightarrow \vec{e}_j \cdot \vec{e}^k = \delta_j^k$$

$$g_{ij} \vec{e}^j = \vec{e}_i$$

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}^1 = 0, \quad \vec{e}_2 \cdot \vec{e}^2 = 0$$



بردار با دوردا: $\vec{a} = a^i \vec{e}_i$

هم‌دوردا: $\vec{a} = a_j \vec{e}^j$

* تمرین ۱: فرض کنید مؤلفه‌های یک تانور مرتبه ۲ با دوردا در سیستم مختصات $\{x\}$ در فضای دو بعدی به صورت زیر باشد:

$$T^{11} = 1, \quad T^{12} = 1, \quad T^{21} = -1, \quad T^{22} = 2$$

الف - مؤلفه‌های $\bar{T}$ را در دستگاه مختصات $\{\bar{x}\}$ که به صورت زیر به دستگاه $\{x\}$ مربوط است، بیابید.

ب - مقادیر عددی $\bar{T}$ را در نقطه‌ای که مختصات $x^1 = 1$ و $x^2 = -2$ است، بیابید.

$$\bar{x}^1 = (x^1)^2 \neq 0$$

$$\bar{x}^2 = x^1 x^2$$

* تمرین ۲: نشان دهید اگر T ها مؤلفه‌های بردار هموردی $\vec{T}$ باشند، $S_{ij} \equiv T_{ij} T_j - T_i T_j$ مؤلفه‌های یک تانور هم‌وردی با دو مقادیر است.

* تمرین ۳: جزایا مؤلفه‌های تانور هم‌وردی مرتبه دو هستند. الف) تحت تبدیل نقطه تمرین ۱، مؤلفه‌های $\bar{T}$ را محاسبه کنید.

اگر: $U_1 = x, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0, \quad U_4 = x^2$

ب - تحقیق کنید که کسیت $\bar{T} = U_1 T_1 + U_2 T_2 + U_3 T_3 + U_4 T_4$ یک اسکالر است که در آن T ها تانور هم‌وردی است.

* تمرین ۴: مؤلفه‌های تانور متریک g را در مختصات خاص $(\bar{x})$ که به صورت زیر به مختصات دکارتی مربوط است، بیابید.

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = \exp(y-x)$$