

مطلب دهم: جمع و تفریق آنورها، قمارک و بارهنگ، در تمام ضرب مستقیم، همه آنورها

بردارها: $A'^i = \sum_j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j$

رابطه بارهنگ: $\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} = a_{ji}$

بردار هم: $A'_i = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} A_j$

آنور مرتبه دوم: $B'_{ij} = \sum_{l,m} \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} B_{lm}$

آنور آنتی: $B'^i{}_j = \sum_l \sum_m \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} B^m_l$ ①

جمع و تفریق آنورها

$A + B = C \Rightarrow C_j = A_j \pm B_j$

* آنورها باید از یک مرتبه باشند تا قابل جمع و تفریق باشند.

مکرر در جمع آنتی

① $\rightarrow B'^i{}_j = \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} B^m_l$

مثال: $R^i_{jk} \leftarrow$ کزن این های آنور و این خاص (dummy) است.

$B^m_l = \delta^m_l$

رابطه کزن این های آنور مرتبه ۱ با بارهنگ آنتی است.

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

R.H.S ① = $\frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \delta^m_l = \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} + \frac{\partial x^3}{\partial x'^1} \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} + \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1}$

مثال: $\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \\ z' = z \end{cases}$

$i=j=1, l=2, m=3$

$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \\ z = z' \end{cases}$

$\frac{\partial x'}{\partial x} = \cos \theta$

$\frac{\partial x}{\partial x'} = \cos \theta$

$\frac{\partial x'^1}{\partial x^3} = \frac{\partial x^1}{\partial x^3} = 0, \frac{\partial x'^1}{\partial y} = \sin \theta$

$\frac{\partial x^3}{\partial x'^1} = \frac{\partial z}{\partial x'} = 0$

$\frac{\partial y}{\partial x'} = \sin \theta$

$$\text{R.H.S } ① = \sum_m \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \delta_l^m = \sum_m \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} = \frac{\partial x'^i}{\partial x'^j} = \delta_j^i$$

وقتی $l=m$ باشد، δ_l^m برابر یک است.

* δ کراندر در یک جمع، اندیس‌ها را نباید به هم می‌اندازد و جمع روی اندیس‌ها را برتری ندارد.

اگر $j=i$ باشد، جواب برابر ۱ است. در غیر این صورت صفر است.

$$\rightarrow \sum_l \sum_m \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \delta_l^m = \delta_j^i$$

تعارف دایا تعارف

symmetric tensor : $A^{mn} = A^{nm}$ اگر

Anti - " : $A^{mn} = -A^{nm}$ اگر

فراغ در مرتبه ۲ را می‌توان به صورت جمع دو قسمت متعارف و دایا متعارف نوشت :

$$A^{mn} = \frac{1}{2} (A^{mn} + A^{mn} + A^{nm} - A^{nm}) = \frac{1}{2} (A^{mn} + A^{nm}) + \frac{1}{2} (A^{mn} - A^{nm})$$

$spin=0$
اسکالر $\rightarrow$ نزنون π

$$\downarrow n \rightarrow m$$

$$A^{nm} + A^{mn}$$

$$\downarrow n \rightarrow m$$

$$A^{nm} - A^{mn} = -(A^{mn} - A^{nm})$$

مختار $\rightarrow$ دورگه‌ها

$spin=1$

تلفور مرتبه ۲ $\rightarrow$ "کروستون"

$spin=2$

$spin=0$
فرمیک (اسکرون) $\rightarrow$ اسپنورها

$$\text{ضرب داخلی} : \vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_i A_i B_i = A_i B_i$$

Contraction ادغام

$B'^i_j \rightarrow B'^i_i$ ؟ می‌چیزی است ؟

تلفور مرتبه ۲

$$① : B'^i_i = \sum_m \sum_l \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} B^m_l = \sum_{l,m} \left(\frac{\partial x^l}{\partial x^m} \right) B^m_l = \sum_l B^l_l \rightarrow \text{اسکالار است}$$

مستق زغیره‌ای

B'^i_i : Trace (تلفور مرتبه ۲ B است).

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \text{Tr } B = b_{11} + b_{22} = \sum_{i=1}^2 b_{ii}$$

* به ازای هاینبرگ ریاضی تلفور مرتبه ۲ تلفور دو تا کاهش می‌یابد

مثال: (اکسار) تانور مرتبه ۲ ضرب $2 \times 2 = 4$ $A_{ijkl} \rightarrow A_{ijzi}$ $2 \times 2 = 4$
 $2 \times 2 = 4$ $2 \times 1 = 2 \Rightarrow$ تانور مرتبه ۲

ضرب مستقیم ← تانورهای مرتبه بالاتر تولید می کنند.

$$a_i \Rightarrow a'_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} a_k$$

$$b_j \Rightarrow b'^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^m} b^m$$

a_i : بردار هم دورا
 b_j : بردار با دورا
 $a_i b_j$: تانور مرتبه ۲ آمیخته

دستانت می کنیم ادعای مارریت است.

$$\frac{a'_i b'^j}{A'_{ij}} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} a_k \frac{\partial x'^j}{\partial x^m} b^m = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^j}{\partial x^m} (a_k b^m) = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^j}{\partial x^m} \frac{(a_k b^m)}{A_k^m}$$

ادغام

$$a'_i b'^j = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^j}{\partial x^m} a_k b^m = \frac{\partial x^k}{\partial x^m} a_k b^m = \delta_m^k a_k b^m = a_k b^k$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (1 \ 0 \ 1)_{1 \times 3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{3 \times 1} = 2$$
 اکسار

$$\vec{A} \otimes \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{3 \times 1} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}_{9 \times 1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{9 \times 1}$$

* حاصل ضرب مستقیم دو تانور، تانوری است که مرتبه آن مجموع مرتبه های دو تانور اولیه است.

$$A_{ij}^{(2)} B_{kl}^{(2)} = C_{jz}^{(4)}$$

مرتبه ۲
مرتبه ۲
مرتبه ۴

$$A_{ijkl} B_{jz} = C_{kl}$$

مرتبه ۴
مرتبه ۲
تانور مرتبه ۲
دو اندیس ادغام نده اند
 $2 \times 2 = 4$
 $6 - 4 = 2$

تانورهای تانورمانند

تانور خارج قسمت

$$K_{ij} A_j = B_i$$

$$K_{ij} A_j = B_i \rightarrow \vec{L} = \{I\} \vec{B}$$

$$K_{ij} A_j = B_i$$

$$K_{ij} A_j = B_i$$

$$K_{ij} A_j = B_i$$

$$K_{ij} A_j = B_i$$

اگر A_j و B_j تانورهای مرتبه 1 هم مرتبط باشند، ثابت کنید: K_{ij} یک تانور مرتبه 2 هم مرتبط است.

$$A_i = \sum \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} A'_j = \sum a_{ij} A'_j \quad \text{نصف اول}$$

$$A'_i = \sum a_{ij} A_j \quad *$$

$$K'_{ij} = a_{ik} a_{jl} K_{kl} \quad \text{حجم}$$

$$\textcircled{2} \rightarrow K'_{ij} A'_j = B'_i \quad \textcircled{3} \text{ رابطه: } A'_j = a_{jk} A_k$$

$$\Rightarrow K'_{ij} A'_j = a_{ik} (K_{kj} A'_j) = a_{ik} K_{kj} (a_{jl} A'_l)$$

$$* : B'_i = a_{ik} B_k$$

$$\textcircled{2} \text{ رابطه: } B_k = K_{kj} A'_j$$

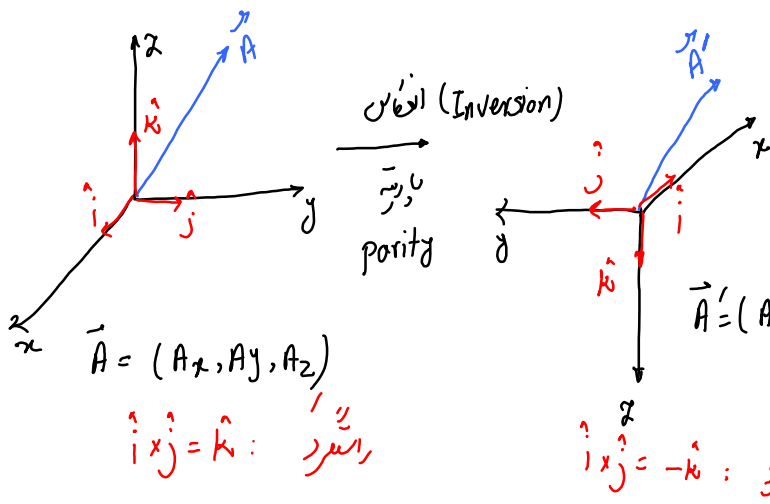
$$\Rightarrow K'_{ij} A'_j = a_{ik} a_{jl} K_{kj} A'_l = a_{ik} a_{jl} K_{kl} A'_j$$

(نصف های l و k را جابجا می کنند)

$$\Rightarrow (K'_{ij} - a_{ik} a_{jl} K_{kl}) A'_j = 0 \rightarrow K'_{ij} = a_{ik} a_{jl} K_{kl}$$

pseudotensors نیم تانورها

بردارها تانورهای مرتبه 1 می باشند



$$A'_i = \sum a_{ik} A_k$$

$$\vec{A}' = (A'_x, A'_y, A'_z) = (-A_x, -A_y, -A_z) = -\vec{A}$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \quad \text{راستگرد}$$

$$\hat{i}' \times \hat{j}' = -\hat{k}' \quad \text{چپگرد}$$

همه بردارهایی که تحت انعکاس به معنی خرد شدن تبدیل می شوند، بردارهای قطبی نامیده می شوند.

$\vec{r} \xrightarrow{\pi} -\vec{r}$ Polar vector - proper vector

پاریتی فرد دارند

مشتق کنید: $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ و $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بردارهای قطبی هستند.

$$\vec{C}' = \vec{A}' \times \vec{B}' = (-\vec{A}) \times (-\vec{B}) = \vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$$

axial vector pseudo-vector

بردارهای محوری یا شبه بردارها $\vec{C}$ تحت پاریتی تغییر نمی کنند $\leftarrow$ پاریتی زوج دارند.

