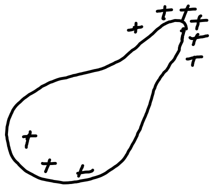
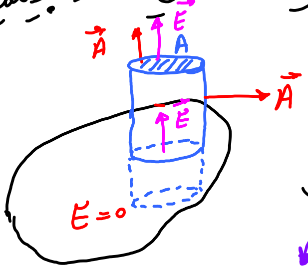
تعادل الکترواستاتیکی ⟵ میدان درون رسانا برابر صفر است

هیچ باری داخل رسانا حرکت نمی‌کند.

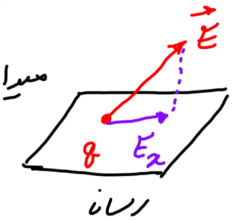
همه بارها روی سطح رسانا قرار می‌گیرند. در مورد رسانای غیرهموار، جایی که انحنا بیشتر است، بار بیشتری قرار می‌گیرد.



مثال ۱: رسانای باردار. فرض کنید چگالی بار سطحی در تمام نقاط برابر σ است. میدان الکتریکی ناشی از این رسانا را پیدا کنید.



میدان الکتریکی رسانا‌ها عمود بر سطح است.



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

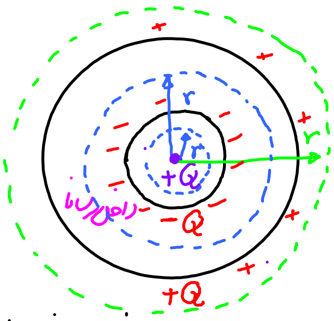
$$\oint \underbrace{E\,dA\cos(\vec{E},d\vec{A})}_{\vec{E}\parallel d\vec{A}} = \frac{q}{\epsilon_0} \Longrightarrow E\cancel{A} = \frac{\overset{\sigma \cancel{A}}{q}}{\epsilon_0} \qquad \vec{F} = q\vec{E}$$

چون میدان عمود به سطح است.

چگالی بار سطحی $\sigma = \dfrac{q}{A}$

$$\Longrightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

مثال ۲: یک پوسته کروی رسانا به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b مفروض است. بار Q در مرکز پوسته است. E را برای $r<a$ و $a<r<b$ و $r>b$ بیابید.



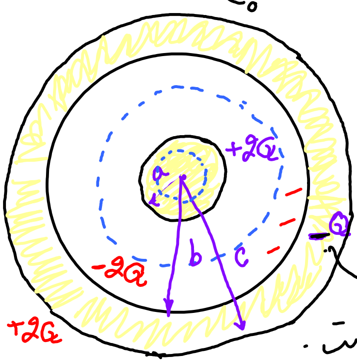
$$\underbrace{\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{E\times 4\pi r^2} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \longrightarrow E_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r<a)$$

میدان داخل رسانا صفر است $\Longrightarrow E_2 = 0 \quad a<r<b$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Longrightarrow E\times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Longrightarrow E_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r>b)$$

مثال ۳: بار کره رسانا $= 2Q$

بار پوسته کروی رسانا $= -Q$



روی پوسته قرار گرفته است.

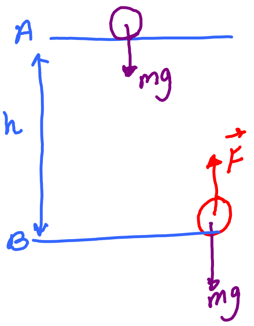
$r<a: \quad q_{in}=0 \longrightarrow E(r<a)=0$

$a<r<b: \quad q_{in} = 2Q \longrightarrow E(a<r<b) = \dfrac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$b<r<c: \quad q_{in} = +2Q - 2Q = 0 \Longrightarrow E(b<r<c) = 0$

$r>c$: $q_{in} = +2Q - 2Q + 2Q - Q = +Q \Longrightarrow E(r>c) = \dfrac{+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

پتانسیل الکتریکی



کار نیروی وزن از A به B $= mgh$

کار من از B به A $= +mgh$

کار نیروی وزن از B به A $= -mgh$

پتانسیل منفی کاری است که نیروی خارجی انجام داده است.

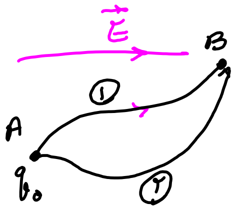
پتانسیل از نقطه B به A افزایش می‌یابد.

〃 〃 A به B کاهش 〃 .

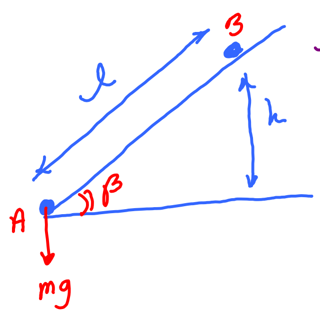
$$\Delta U = \underbrace{U_f}_{\text{نقطه نهایی}} - \underbrace{U_i}_{\text{نقطه اولیه}} = -W_{if} \Longrightarrow U_B - U_A = -W_{AB}$$

$$U_B - U_A = -mgh$$

پتانسیل الکتریکی : $\Delta U = U_B - U_A = -q_0 \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = -W_{AB}$



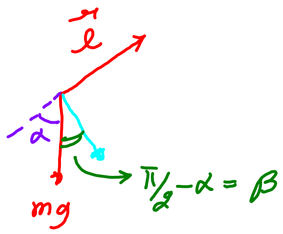
کار نیروی پایستار به مسیر بستگی ندارد.



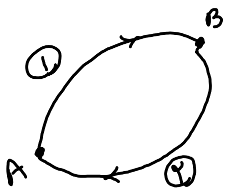
$\sin\beta = h/l$

$$W_{AB} = \int \vec{F}_g\cdot d\vec{l} = \vec{F}_g\cdot\vec{l} = F_g\, l\cos(\alpha)$$

$$l\sin(\underbrace{\pi/2-\alpha}_{\beta}) = h$$



$$\Longrightarrow W_{AB} = mgh$$



$$\left.\begin{aligned} W^{(1)}_{AB} &= W^{(2)}_{AB} \\ W_{BA} &= -W_{AB} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow W^{(1)}_{AB} = -W^{(2)}_{BA} \Longrightarrow W^{(1)}_{AB} + W^{(2)}_{BA} = 0$$

کار نیروی پایستار روی مسیر بسته صفر است.

curl
نیروی پایستار کرل یا دوران صفر دارد.

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

$\vec{\nabla}\varphi$: گرادیان φ ، φ : اسکالر

$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$: دیورژانس A ، $\vec{A}$: بردار

$\vec{\nabla}\times\vec{A}$: کرل A ، $\vec{A}$: بردار

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k} \rightsquigarrow$$ گرادیان یک بردار است.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \rightsquigarrow$$ دیورژانس یک اسکالر است.

شماره سطر ، شماره ستون

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \hat{i}\underbrace{(-1)^{1+1}}_{+1}\underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_y & A_z \end{vmatrix}}_{\partial A_z/\partial y - \frac{\partial A_y}{\partial z}} + \hat{j}\underbrace{(-1)^{1+2}}_{(-1)}\underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_z \end{vmatrix}}_{\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}}$$

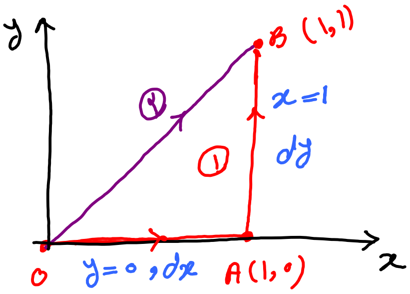
$$+\hat{k}\,\underbrace{(-1)^{1+3}}_{(+1)}\underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_x & A_y \end{vmatrix}}_{\partial A_y/\partial x \,-\, \partial A_x/\partial y}$$

مثال: مؤلفه‌های بردار $\vec{F}$ به صورت مقابل است:

$$F_x = 2xy \quad , \quad F_y = x^2 - y^2 \quad , \quad F_z = 0$$

الف - آیا این نیرو پایستار است؟

ب - کار این نیرو را از نقطه O به B بر روی دو مسیر نشان داده شده محاسبه کنید.



الف -

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2-y^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left(-\frac{\partial}{\partial z}\right)\underbrace{(x^2-y^2)}_{0} - \hat{j}\left(-\frac{\partial}{\partial z}\right)\underbrace{2xy}_{0} + \hat{k}\left\{\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2)}_{2x} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(2xy)}_{2x}\right\} = 0$$

این نیرو پایستار است.

ب -

$d\vec{x} = (dx, 0, 0) \qquad d\vec{y} = (0, dy, 0)$

$$W_{①} = \int_O^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_O^A + \int_A^B = \int_O^A \underbrace{\vec{F}\cdot dx\,\hat{i}}_{2x\underset{=0}{y}\,dx} + \int_A^B \underbrace{\vec{F}\cdot dy\,\hat{j}}_{(\underset{1}{x^2}-y^2)\,dy} = \int_{y=0}^{y=1}(1-y^2)\,dy$$

$$= \int_0^1 dy - \int_0^1 y^2\,dy = y\Big|_0^1 - \frac{1}{3}y^3\Big|_0^1 = (1-0) - \frac{1}{3}(1^3-0) = 1-\frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}\ \text{J}}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$W_{②} = \int_O^B \vec{F}\cdot \underbrace{d\vec{l}}_{dx\,\hat{i}+dy\,\hat{j}} = \int_O^B \overset{2xy}{F_x}\,dx + \overset{x^2-y^2}{F_y}\,dy$$

خط OB: $y = x \rightarrow dy = dx$

$$\cancel{\int 2xy\,dy = 2x\int \underbrace{y\,dy}_{\frac{1}{2}y^2} = xy^2}$$

$$= \underbrace{\int_O^B 2x\overset{x}{\cancel{y}}\,dx}_{} + \int_O^B (\underset{y^2}{\cancel{x^2}} - y^2)\,dy$$

$$\int_0^B 2x^2\,dx = 2\int_0^1 x^2\,dx = 2\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = 2\times\frac{1}{3}(1-0) = \frac{2}{3} \longrightarrow \boxed{W_{②} = \frac{2}{3}\ \text{J}}$$