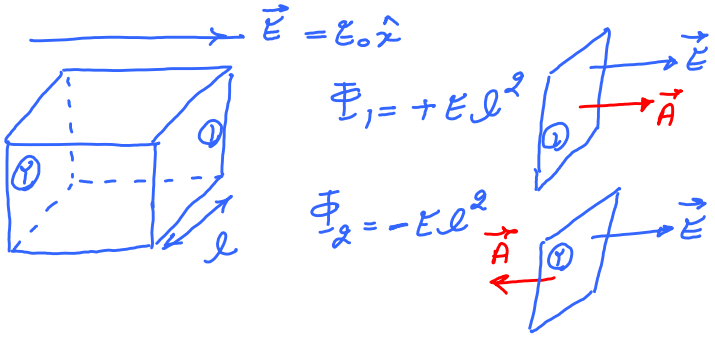
جلسه سوم کرونا : قانون گاوس ← کاربردها

Note Title ۱۳۹۹/۰۲/۰۵

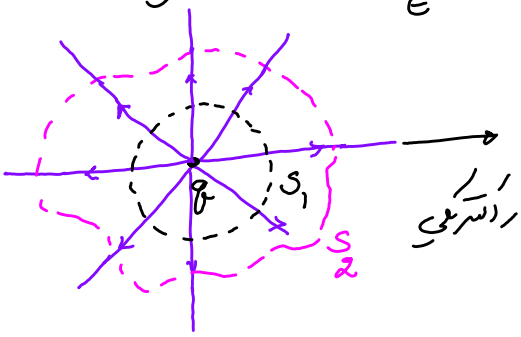


$$\Phi_E = \int \vec{E}.d\vec{A} = \int E\,dA\cos(E, dA)$$

$$\Rightarrow \Phi_{net} = 4\times 0 + El^2 - El^2 = 0$$

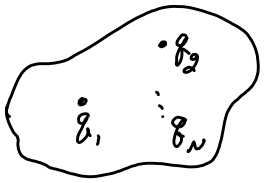
قانون گاوس : شار الکتریکی که از یک سطح بسته عبور میکند ،
متناسب است با بار الکتریکی محصور شده توسط آن سطح

$$\Phi_E = \oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon}$$



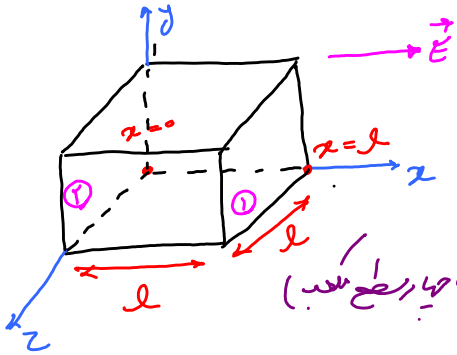
بار الکتریکی محصور شده
درون سطوح متقارن شار الکتریکی
را تعیین می کند .

اندازه میدان الکتریکی α تعداد خطوط میدان
در واحد سطح



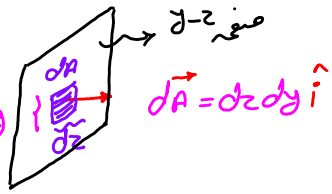
$$\Phi_E = \oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{\overbrace{q_1 + \cdots q_N}^{\sum_{i=1}^{N} q_i}}{\epsilon_0}$$

مثال : میدان الکتریکی به صورت $\vec{E} = a x^2 \hat{i}$ است . الف ـ شار الکتریکی گذرنده از سطح مکعب روبرو چقدر است ؟
ب ـ بار داخل مکعب چقدر است ؟



میدان الکتریکی جهت x ، به صفحات $z-x$ و $y-x$ عمود است ← $\cos\theta = 0$ ← بر عمودی سطح

(روی چهار سطح مکعب) $\Phi = 0$



$$\Phi_1 = \int \vec{E}.d\vec{A} = \int E\,dA\,\underbrace{\cos\theta^{=0}}_{1} = \int a x^2\,dz\,dy = a\overbrace{(x^2)}^{l^2}\int \overbrace{dz\,dy}^{l^2}$$

$$\Phi_2 = \int \vec{E}.dA = \int E\,dA\,\underbrace{\cos\theta^{=180^\circ}}_{-1} = -\int a x^2\,dz\,dy = -a x^2 l^2$$

$$\Rightarrow \Phi_{net} = 4\times 0 + \Phi_2^{=0} + \Phi_1^{=a l^4} = a l^4 = \frac{2^5}{\epsilon_0}$$

فرض کنید : $l = 2\ m$

قانون گاوس : $\Phi = q/\epsilon_0 \Rightarrow \frac{2^5}{\epsilon_0} = q/\epsilon_0 \rightarrow q = 2^5 C$

کاربردهای قانون گاوس ← توزیع بار با تقارن مانند.

یکی از این چهار شرط هم باید برقرار باشد:

۱- میدان الکتریکی بر روی سطح ثابت باشد.

۲- ضرب داخلی $d\vec{A}.\vec{E}$ به صورت $\pm EdA$ نوشته شود ($\vec{E}$ و $d\vec{A}$ هم‌راستا باشند)

۳- ضرب " " برابر صفر باشد ($\vec{E}$ و $d\vec{A}$ عمود هستند)

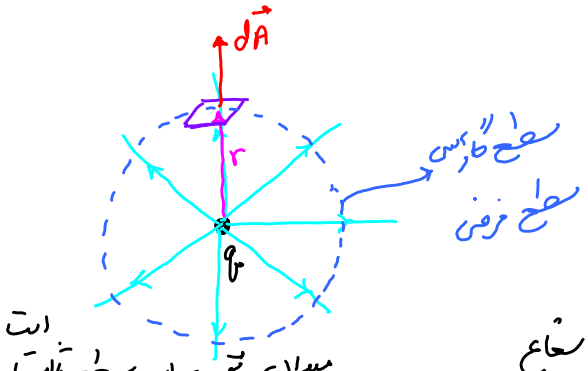
۴- میدان بر روی سطح برابر صفر باشد.

مثال ۱: میدان الکتریکی ناشی از یک بار نقطه‌ای

* در کره، شعاع بر سطح کره عمود است.

⇓

بردار عمود بر سطح کره، موازی شعاع است.



میدان $\vec{E}$ روی این سطح ثابت است

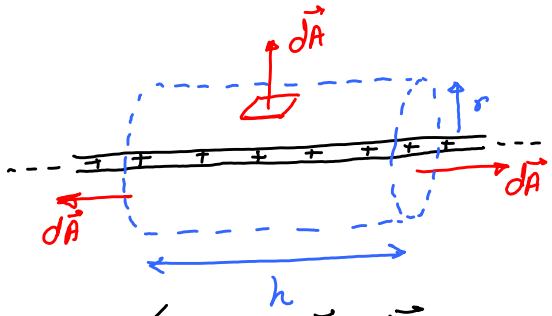
$\vec{E} = E\hat{r}$ ← در جهت شعاع

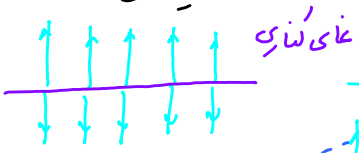
$\vec{E} \parallel d\vec{A}$

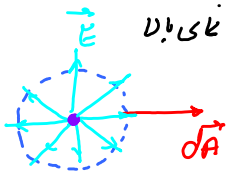
$$\Phi_E = \oint \vec{E}.d\vec{A} = q/\epsilon_0 \rightarrow \oint E dA = q/\epsilon_0 \Rightarrow E \times A = q/\epsilon_0 \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$4\pi r^2$ = سطح کره

مثال ۲: میدان الکتریکی یک خط نامتناهی با بار حجمی بار ثابت λ







برای سطح جانبی: $\vec{E} \parallel d\vec{A}$

برای سطوح کناری: $\vec{E} \perp d\vec{A} \leftarrow \vec{E}.d\vec{A} = 0$ ← شاری که از سطوح کناری عبور می‌کند صفر است.

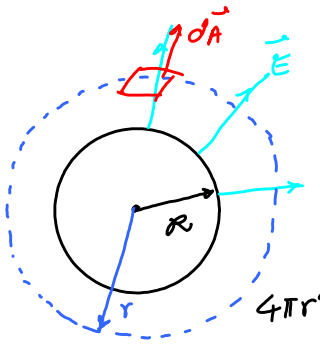
λ = چگالی بار خطی $= \frac{q}{h} \Rightarrow q_{in} = \lambda h$

سطح جانبی استوانه $= 2\pi r h$

$$\Phi_E = \oint_{\text{جانبی}} \vec{E}.d\vec{A} = \oint E dA = EA = q/\epsilon_0 \rightarrow E \times 2\pi r h = \frac{q_{in} = \lambda h}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}$$

مثال ۳: میدان الکتریکی توزیع بار کروی را داخل کره و خارج آن بیابید (کنید و چگالی یکنواخت)



الف- خارج کره

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \oint E dA = \frac{q}{\epsilon_0}$$

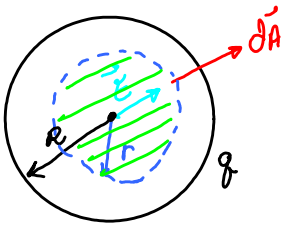
$\vec{E} \parallel d\vec{A}$

$4\pi r^2$ = سطح کره

$$\Rightarrow E \times A = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_{out} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r}$$

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow q = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3$$

ب - داخل کره

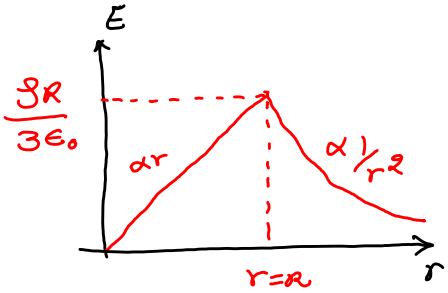


$E \parallel dA \Rightarrow \oint E.dA = E \times 4\pi r^2 = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$

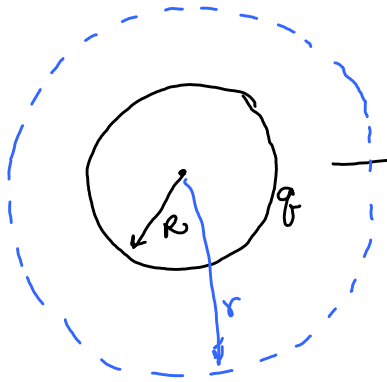
چگالی حجمی $\rho = \frac{q}{V} = \frac{q_{in}}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow q_{in} = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3$

حجم سطح گاوسی

$\Rightarrow E \times 4\pi r^2 = \rho/\epsilon_0 \times \frac{4\pi}{3} r^3 \Rightarrow \vec{E}_{in} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \hat{r}$

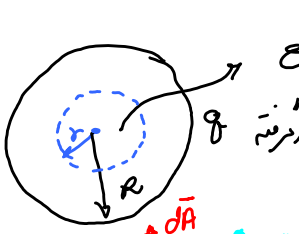


$\vec{E}_{out}\Big|_{r=R} = \vec{E}_{in}\Big|_{r=R} \Rightarrow \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \times \frac{1}{R^2} \stackrel{?}{=} \frac{\rho}{3\epsilon_0} R$ ✓



داخل این سطح کل بار کره قرار گرفته

$\rho = \frac{q}{V}$: چه مقدار بار در هر مقدار حجم قرار گرفته است. $\rightarrow \rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

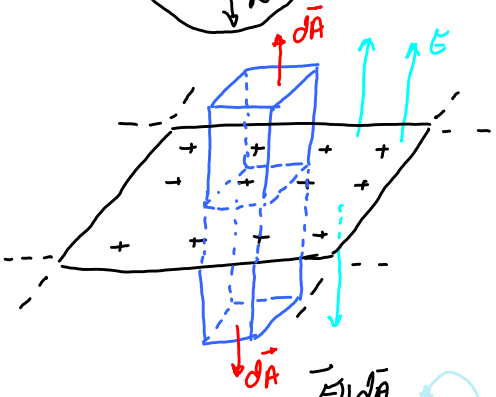


داخل این سطح بار q_{in} قرار گرفته

$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q_{in}}{\frac{4}{3}\pi r^3}$

میدان الکتریکی

مثال ۱: ورقه نامتناهی با بار حجمی ثابت ρ



برای هر سطح چپ و راست و روی و پشت، میدان E و $d\vec{A}$ هم عمود هستند

$\vec{E}.d\vec{A} = 0 \rightarrow \Phi = 0$

روی سطوح بالا و پایین: $\vec{E} \parallel d\vec{A}$

$\oint \vec{E}.d\vec{A} = q/\epsilon_0 \Rightarrow 2\int E\,dA = q/\epsilon_0$

$q_{in} = \sigma A'$

$\sigma = \frac{q}{A}$

$\Rightarrow 2E\int dA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$ → چه مقدار بار روی صفحه تقاطع سطح گاوسی احاطه شده است و

A': مساحت سطح گاوسی (سطح مربع بالایی یا پایین)

$\Rightarrow 2E = \sigma/\epsilon_0 \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$