فصل ۸ : گذشت زمان

تصویر شرودینگر

اپراتورها : با زمان عوض نمی‌شوند

تابع موج : از معادله شرودینگر پیروی می‌کند .

معادله شرودینگر : $\dfrac{i\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(\vec{x},t)$

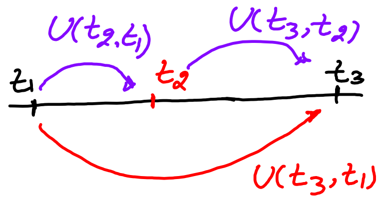
Classical Mechanics: $\vec{F} = m\, d^2\vec{x}/dt^2 \longrightarrow \vec{x}(t),\ \vec{P}(t)$

$$\psi(t_2) = \underbrace{\hat{U}(t_2,t_1)}_{\text{اپراتور تحول زمانی}}\psi(t_1)$$

خصوصیات اپراتور time evolution :

1) $\hat{U}(t_1,t_1) = \mathbb{1}$

2) $\hat{U}(t_3,t_1) = \hat{U}(t_3,t_2)\,\hat{U}(t_2,t_1)$



3) $i\, d/dt_2\, \hat{U}(t_2,t_1) = \hat{H}\,\hat{U}(t_2,t_1) \longrightarrow U(t_2,t_1) = \exp\left[-iH(t_2-t_1)\right] \longrightarrow$ H وابستگی زمانی نداشته باشد

4) $U(t_1,t_2) = U^{-1}(t_2,t_1)$

5) $\hat{U}^{+}(t_1,t_2)\,\hat{U}(t_1,t_2) = \mathbb{1}$: unitary

تصویر هایزنبرگ

$$\left.\begin{array}{l}\langle\hat{O}(t)\rangle = \langle\psi(t)|\hat{O}|\psi(t)\rangle \\ t_1=0,\ t_2=t \longrightarrow \psi(t) = e^{-iHt}\psi(0)\end{array}\right\} \Longrightarrow \langle\psi(t)|\hat{O}|\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)|\underbrace{U^{+}(t,0)\,\hat{O}\,U(t,0)}|\psi(0)\rangle$$

$\hat{O}_S = \hat{O}$ مستقل از زمان

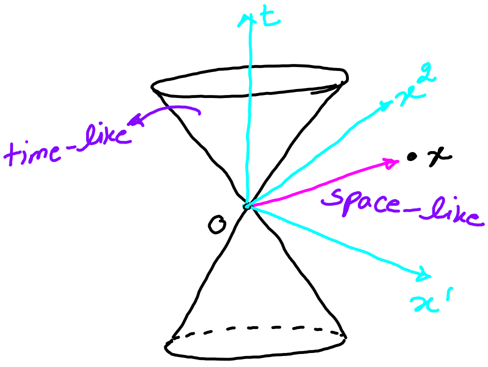
$\hat{O}_H$ وابسته به زمان

مستقل از زمان $|\psi_H\rangle = |\psi(0)\rangle$

تابع موج وابسته به زمان : $|\psi_S(t)\rangle = U(t,0)|\psi(0)\rangle$

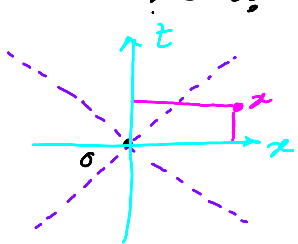
$$\Longrightarrow \hat{O}_H = U^{+}(t,0)\,\hat{O}_S\,U(t,0) \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{d\hat{O}_H(t)}{dt} = \frac{1}{i}\left[\hat{O}_H(t),\hat{H}\right]$$: معادله حرکت هایزنبرگ

حرکت ذره منفرد در Q.M



$s^2 = 0$: light-like

فرض کنید ذره در مبدأ قرار دارد. ($\vec{x}=0$ و $t=0$) و به نقطه ($\vec{x}$ و t) حرکت می‌کند در خارج مخروط نوری است. دامنه احتمال برای این حرکت چقدر است ؟



خارج مخروط : $|\vec{x}| > t \longrightarrow s^2 = t^2 - \vec{x}^2 < 0$

$s^2 < 0$: space-like $s^2 > 0$: time-like

اگر ذره‌ای در حالت $|a\rangle$ باشد و کلی اتفاق بیفتد و به حالت $|b\rangle$ برود. احتمال این که ذره در حالت $|b\rangle$ یافت شود: $|\langle b|a\rangle|^2$

$$A = \langle x| e^{-iHt} \underset{1}{|x=0\rangle} = \int d^3p\, \langle x| \underbrace{e^{-iHt}|p\rangle}_{e^{-iE_pt}|p\rangle} \underbrace{\langle p|x=0\rangle}_{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{0}}}$$

$$[H,p]=0$$
$$H|p\rangle = E_p|p\rangle$$
$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

$$= \int d^3p\, e^{-iE_pt}\langle x|p\rangle \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \underbrace{d^3p}_{p^2dp\,d(\cos\theta)d\phi}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\, e^{-iE_pt}$$

مختصات کروی کار می‌کنیم:

$$A = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi}\int_0^\infty \frac{dp}{(2\pi)^{3}}\, p^{\cancel{2}} \int_{-1}^{+1} \underbrace{d(\cos\theta)\, e^{ipx\cos\theta}}\, e^{-iE_pt}$$

$$\frac{1}{ixp} e^{ipx(\cos\theta)}\Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{ix\cancel{p}}\left(e^{ipx}-e^{-ipx}\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{ix}\int_0^\infty \underbrace{p\,dp\,\left(e^{ipx}-e^{-ipx}\right)e^{-iE_pt}}_{\int_{-\infty}^{+\infty} p\,dp\, e^{ipx}\, e^{-it\sqrt{p^2+m^2}}} \rightsquigarrow p^2+m^2=0 \Longrightarrow p=\mp im \text{ : branch point}$$

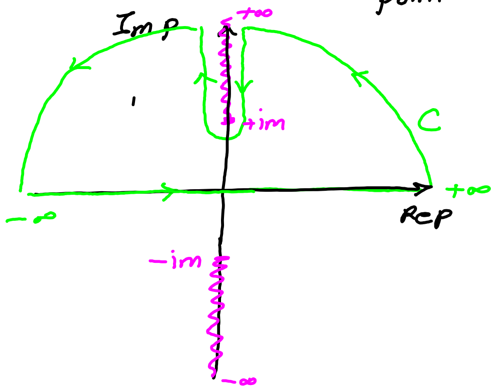
$$\int \sqrt{z}\, dz$$

داخل مرز بسته‌ی انتگرال‌گیری تکینگی ندارد

$p \to$ مختلط $\longrightarrow \oint_C \cdots = 2\pi i\, a_{-1} = 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\text{حقیقی } p) + \cancel{\int_{\text{نیم دایره}}}^{\,0} + \int_{+\infty}^{im} + \int_{im}^{+\infty} = 0$$

$(|x|>t)$ برطبق لم جردن



$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} = -\left(\int_{+\infty}^{im} + \int_{im}^{+\infty}\right)$$

$p \to iz$ $\qquad$ $\longrightarrow p \to -p$

$$\int_{im}^{+\infty} = \frac{1}{(2\pi)^2\, ix}\int_m^{+\infty} d(iz)\, iz\, e^{i(iz)x}\, e^{-it\sqrt{(iz)^2+m^2}} \qquad = -it\sqrt{-(z^2-m^2)} = t\sqrt{z^2-m^2}$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^2 x}\int_m^{+\infty} dz\, z\, e^{-zx\,\overset{-mx+mx}{}}\, e^{t\sqrt{z^2-m^2}}$$

$\longrightarrow e^{-mx} \times e^{-(z-m)}$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}(\cdots) = \frac{i}{(2\pi)^2 x}\, e^{-mx}\int_m^{\infty} dz\, z\, e^{-(z-m)x}\overbrace{\left\{e^{t\sqrt{z^2-m^2}} - e^{-t\sqrt{z^2-m^2}}\right\}}^{2\sinh\left(t\sqrt{z^2-m^2}\right)} \neq 0$$

احتمال یافتن ذره در نقطه x خارج مخروط نوری متناسب با e^{-mx} است.

$$\Longrightarrow |A|^2 \neq 0$$

Single particle Quantum Mechanics is dead!

روش دوم: فرض کنید یک جعبه داریم که طول آن کمتر از طول موج کامپتون یک ذره به جرم m است.

عدم قطعیت در مکان ذره: $\Delta x \ll \lambda \longrightarrow \Delta p \gg \frac{h}{\lambda} = m \Longrightarrow$ انرژی ذره از جرم در حال سکون خیلی بیشتر است ⟵ می‌توانیم تولید زوج داشته باشیم

$\Delta p \Delta x \sim \hbar$

↓

بیشتر از یک ذره داخل جعبه می‌تواند وجود داشته باشد.

Old Q.M is dead - long live fields!

مشاهده‌گری روی زمین اتفاقی را اندازه می‌گیرد. نسبیت خاص می‌گوید نمی‌توانید در کهکشان Andromeda اتفاقی را که یک ثانیه بعد اتفاق افتاده است را اندازه بگیرید. اگر قرار باشد چنین اتفاقی بیفتد باید سرعت انتقال اطلاعات بیشتر از سرعت نور باشد.

فرض کنید سیاره‌ای در فاصله 3×10^9 m ما قرار دارد. اتفاقی در این سیاره می‌افتد و ما روی زمین می‌خواهیم آن را اندازه‌گیری کنیم.

$$x = ct \Longrightarrow 3\times10^9 = 3\times10^8 \times t \longrightarrow t = 10\,s$$

اگر $t = 1\,s \Longrightarrow v = \frac{3\times10^9}{1} = 10c$

$\vec{B}(x)$, $\vec{E}(x)$: میدان‌هایی که $x^\mu = (t, x)$ را می‌گیرند و تنها میدان E و B را در آن نقطه می‌دهند.

$\vec{E}(t_1, \vec{x}_1)$ $\quad$ $\vec{E}(t_2, \vec{x}_2)$

نمی‌توانیم آزمایشی طراحی کنیم که همزمان میدان E را برای (اینجا و الان) $= x$ و برای (آندرومدا و الان) $= x$ بدهد.

تلفیق Q.M و S.R ⟵ باید میدان‌های operator-valued داشته باشیم.

اپراتور $\quad$ میدان

۱) نباید اجازه انتشار اطلاعات با سرعت بالاتر از سرعت نور را بدهند. ⟵ فاصله فضا-گونه

۲) اگر قرار باشد این اپراتورها مشاهده‌پذیر باشند، باید هرمیتی باشند.

$\hat{O}_1$: مشاهده‌پذیری که در نقطه x اندازه‌گیری شده است

$\hat{O}_2$: " " " " y " " "

نکته: x و y فاصله فضا-گونه دارند. $(x-y)^2 < 0$

$\xrightarrow{Q.M} [\hat{O}(x), \hat{O}(y)] = 0$: نتیجه اندازه‌گیری اپراتور $\hat{O}(x)$ بر روی $\hat{O}(y)$ تأثیری ندارد.

نتیجه: برای این که بتوانیم میدان‌های کوانتومی را بسازیم باید اپراتورهایی پیدا کنیم که در نقاط فضا-زمان تعریف شوند: $\hat{\phi}(x)$

*مسئله ۸.۴ را حل کنید

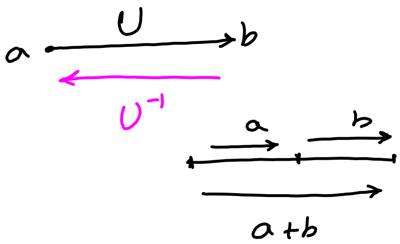
فصل ۹: تبدیلات تقارنی کوانتومی

انتقال در فضا-زمان

$\hat{U}(a)|x\rangle = |x+a\rangle$: active transformation

$x \longrightarrow x+a$

خصوصیات انتقال: 1) بقای احتمال:



$U^\dagger U = UU^\dagger = 1 \longleftarrow$ $U^\dagger = U^{-1}$

2) $U(a+b) = U(a)U(b)$

3) $\hat U(0) = 1$

$\hat X U(a)|\vec x\rangle = \hat X|x+a\rangle = (x+a)|x+a\rangle$ رابطه ویژه مقداری اپراتور مکان: $X|x\rangle = x|x\rangle$

$U^\dagger \hat X U|x\rangle = (x+a)U^\dagger(a)|x+a\rangle = (x+a)|x\rangle \Longrightarrow U^\dagger(a)\hat X U(a) = \hat X + a1$

$(x+a)|x+a\rangle$ ما را از نقطه $x+a$ به اندازه a به عقب بر می‌گرداند $\boxed{(\hat X + a1)|x\rangle}$

شکل اپراتور انتقال

$\hat p = -i\,d/dx$

$\psi(x+\delta a) = \psi(x) + \frac{d\psi}{dx}\delta a + \cdots = \psi(x) + i\hat p\psi(x)\delta a = (1+i\hat p\,\delta a)\psi(x)$

خیلی کوچک $\quad i\hat p \quad$ مولد انتقال

اپراتور انتقال به اندازه محدود a $= \hat U(\vec a) = e^{-i\hat p\cdot\vec a}$

فرض کنید مقدار چشمداشتی اپراتور $\hat O$ تحت تبدیل انتقال ناوردا باشد:

$\langle\psi|\hat O|\psi\rangle = \langle\psi|U^\dagger \hat O U|\psi\rangle$

$|\psi\rangle \longrightarrow \hat U|\psi\rangle$

$\Rightarrow \hat O = U^\dagger \hat O U \xrightarrow[\text{از چپ}]{\times U} UO = \underbrace{UU^\dagger}_{1} OU$

$\Rightarrow UO = OU \Rightarrow [O,U]=0$

هامیلتونی ذره آزاد: $H = \frac{p^2}{2m} \longrightarrow [H,p]=0$ پایستگی تکانه خطی، مولد انتقال

$\downarrow$

$[U,p]=0 \;;\; U = e^{-iHt}$

چرخش

$|\vec p\,'\rangle = \hat U(\theta)|\vec p\rangle \rightsquigarrow$ 1) $U^\dagger(\theta)U(\theta) = 1$

2) $U(0) = 1$ $\longrightarrow \hat U(\theta) = e^{-i\vec J\cdot\vec\theta}$ مولد دوران

3) $U(\theta_1)U(\theta_2) = U(\theta_1+\theta_2)$

نمایش تبدیل ⟵ میدانهای کوانتومی چگونه تحت تبدیل پیدا میکنند؟

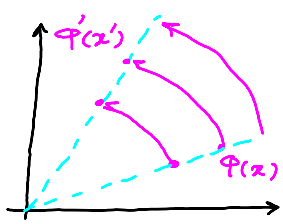
$\hat\varphi(x) \longrightarrow$ ویژه مقادیر: اسکالر: ذرات $spin=0$

بردار

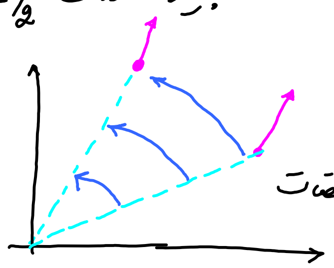
تانسور

$spin=1/2$ ذرات: اسپینور

چرخش فضایی

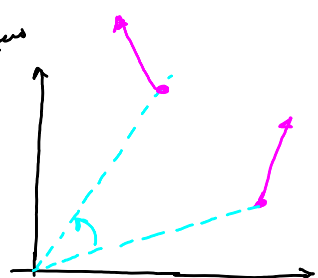


میدان اسکالر



چرخاندن مختصات

میدانهای برداری



خود بردارها هم باید چرخانده شوند.

در Q.M : هر چرخش $R(\theta)$ با یک ماتریس مربعی $D(\theta)$ متناظر است.

ماتریس دوران : $D(\theta) = e^{-i\vec{J}\cdot\vec{\theta}}$ ⟵ ماتریس مربعی

$$\longrightarrow \quad J^i = -\frac{1}{i}\,\frac{\partial D(\theta^i)}{\partial \theta^i}\Big|_{\theta^i=0}$$

$\vec{J} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ ⟶ ماتریس های پائولی

مثال: الف - نمایش دوران حول محور z برای ذرات اسپین $\frac{1}{2}$.

$s=\frac{1}{2}$ اپراتور دوران : $e^{-i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\hat{n}\theta} = \cos\frac{\theta}{2}\mathbb{1} - i\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\sin\frac{\theta}{2}$

محور دوران

$$\hat{n}=\hat{z} \Longrightarrow \text{اپراتور دوران} = \cos\frac{\theta}{2}\mathbb{1} - i\overbrace{\vec{\sigma}\cdot\hat{z}}^{\sigma_z}\sin\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} - i\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\Longrightarrow \text{ماتریس دوران} : D(\theta^z) = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2} & 0\\ 0 & \cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} \Longrightarrow D(\theta^z) = \begin{pmatrix}e^{-i\theta/2} & 0\\ 0 & e^{i\theta/2}\end{pmatrix}$$

$$J^z = -\frac{1}{i}\,\frac{\partial D(\theta^z)}{\partial\theta}\Big|_{\theta=0} = i\begin{pmatrix}-\frac{i}{2}\underbrace{e^{-i\theta/2}}_{1} & 0\\ 0 & \frac{i}{2}\underbrace{e^{i\theta/2}}_{1}\end{pmatrix}\Bigg|_{\theta=0} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_z \ \checkmark$$

ب - برای چرخش در فضای سه بعدی (حول محور z)

$$D(\theta^z) = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0&0&1\end{pmatrix} \longrightarrow J^z = i\begin{pmatrix}-\cancel{\sin\theta}^{\,0} & \overbrace{\cos\theta}^{1} & 0\\ \underbrace{-\cos\theta}_{-1} & -\cancel{\sin\theta}^{\,0} & 0\\ 0&0&0\end{pmatrix}\Bigg|_{\theta=0} = i\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

نمایش دوران برای یک میدان با اسپین j : $D^{(j)}(\theta)$ ⟵ میدان اسکالر $D^{(0)}(\theta)=\mathbb{1}$

$D^{(1/2)}(\theta)$ 〃 اسپینوری

$$\boxed{[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk}J^k}$$

* نکته : اپراتورهای دوران ، ساختار جبری لی دارند.

تحول زمانی : e^{-iHt}

انتقال : $e^{-i\vec{P}\cdot\vec{a}}$

دوران : $e^{-i\vec{J}\cdot\vec{\theta}}$

گروه لی G با مولدهای T داریم. اعضای گروه به این صورت نوشته می شوند: $e^{-i\vec{T}\cdot\vec{\alpha}}$

مولد گروه ⟵ $\vec{T}$ ، $\vec{\alpha}$ ⟶ پارامتر گروه

جبر گروه لی : $[T^i, T^j] = if^{ijk}T^k$

f^{ijk} ⟵ ثابت ساختار گروه