جلسه هفتم : فصل ۶ : مکانیک کوانتومی نسبیتی ← معادله کلین-گوردون و انرژی های منفی

فصل ۷ : مثال هایی از لاگرانژی

Note Title ۱۳۹۹/۰۲/۱۷

معادله کلین-گوردون Klein Gordon

ذره آزاد : $E = \frac{p^2}{2m}$ $\quad E \to i\hbar\, \partial/\partial t \quad , \vec{p} \to -i\hbar \vec{\nabla}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \varphi(\vec{x},t) = i\hbar \frac{\partial \varphi(\vec{x},t)}{\partial t} \longrightarrow \varphi(\vec{x},t) = N e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} = N e^{-ip\cdot x}$$

موج ورودی

incoming wave

$x = (ct, \vec{x})$

$p = (E/c, \vec{p}) \quad , \vec{p} = \hbar \vec{k} \quad , \quad E = \hbar\omega \xrightarrow{\hbar = c = 1} p = (\omega, \vec{k})$ $\Big\} \Longrightarrow p\cdot x = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{x}$

$$\hat{p}\, \varphi(\vec{x},t) = (-i\hbar)\vec{\nabla}\, N e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} = (-i\hbar)(i\vec{k})\,\varphi(\vec{x},t) = \hbar\vec{k}\,\varphi(\vec{x},t)$$

$$\hat{E}\, \varphi(\vec{x},t) = (i\hbar)\,\partial/\partial t \quad '' \quad = i\hbar(-i\omega t)\,\varphi(\vec{x},t) = \hbar\omega\,\varphi(\vec{x},t)$$

رابطه نسبیتی انرژی : $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \Longrightarrow i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sqrt{(-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4)}\ \varphi$

راه حل : $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \xrightarrow{\hbar = c = 1} -\frac{\partial^2 \varphi(\vec{x},t)}{\partial t^2} = (-\nabla^2 + m^2)\,\varphi(\vec{x},t)$

$$\Longrightarrow \big(\underbrace{\partial^2/\partial t^2 - \nabla^2}_{} + m^2\big)\,\varphi(\vec{x},t) = 0 \Longrightarrow \boxed{(\partial^2 + m^2)\,\varphi = 0}$$ K.G. equation

$\Box = \partial^2 = \partial_\mu \partial^\mu$

حدس جواب : $\varphi(x) = N e^{-ip\cdot x}$ $\quad p\cdot x = p_\mu x^\mu$

$$\partial_\mu \varphi(x) = N(-ip_\mu)\, e^{-ip\cdot x} \longrightarrow \partial_\mu \partial^\mu \varphi(x) = N \overbrace{(-ip_\mu)(-ip^\mu)}^{-p^2} e^{-ip\cdot x} = -p^2\,\varphi(x)$$

$$\Longrightarrow (\partial^2 + m^2)\,\varphi(x) = (-p^2 + m^2)\,\varphi(x) = (\cancel{-E^2 + \vec{p}^2 + m^2})^{0}\,\varphi(x) = 0 \ \checkmark$$

$p^\mu = (E, \vec{p})$

$p^2 = p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p}^2 \longleftarrow p_\mu = (E, -\vec{p})$

چگالی و جریان احتمال

در Q.M. :

رابطه پایستگی : $\partial \rho/\partial t + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$ $\quad$ // معادله شرودینگر $\quad \vec{j} = \frac{-i\hbar}{2m}(\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi \vec{\nabla}\psi^*)$

چگالی احتمال $\quad$ چگالی جریان

چاربردار جریان : $j^\mu = (\rho, \vec{j})$

$\partial_\mu = (\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla})$

به شکل هموردا

Covariant form

$\partial_\mu j^\mu = 0$

در G.M. نسبتی :

$$(\partial^2+m^2)\varphi(x)=0$$

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=(-\nabla^2+m^2)\varphi \xrightarrow{\times\varphi^*} -\varphi^*\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\varphi^*(-\nabla^2+m^2)\varphi$$

تکرار * $\downarrow$

$$-\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial t^2}=(-\nabla^2+m^2)\varphi^* \xrightarrow{\times\varphi} -\varphi\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial t^2}=\varphi(-\nabla^2+m^2)\varphi^*$$

تفریق دو رابطه :

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{i\left(\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\varphi\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\right)}_{\rho(\vec{x},t)=\rho(x)}=\vec{\nabla}\cdot\underbrace{i(-\varphi^*\vec{\nabla}\varphi+\varphi\vec{\nabla}\varphi^*)}_{j(\vec{x},t)=j(x)}$$

$$\Rightarrow j^\mu(x)=i(\varphi^*\partial^\mu\varphi-(\partial^\mu\varphi^*)\varphi) \Rightarrow$$ رابطه پایستگی : $\partial_\mu j^\mu=0$

$$\varphi=Ne^{-ip\cdot x}\Rightarrow j^0=\rho=i\{N^*\cancel{e^{+ip\cdot x}}N(-iE)\cancel{e^{-ip\cdot x}}-\dots\}=2|N|^2E \quad ①$$

چون E می‌تواند منفی باشد ، چگالی احتمال نیز منفی است پس از ρ نمی‌توان تعبیر چگالی احتمال کرد .

تعبیر فاینمن برای انرژی های منفی

معادله حرکت کلاسیکی یک ذره باردار در میدان E.M. :

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}=qF^\mu_{\ \nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}$$

$$\tau\longrightarrow-\tau \equiv q\longrightarrow-q$$ ؛ یک ذره که در زمان به سمت عقب حرکت می‌کند شبیه به ذره‌ای است با بار مخالف که در زمان به سمت جلو حرکت می‌کند .

$$\varphi(x)=Ne^{-ip\cdot x}=Ne^{-i(Et-\vec{p}\cdot\vec{x})}\xrightarrow[t\to-t]{}Ne^{-i(-Et-\vec{p}\cdot\vec{x})}=Ne^{+i(\cancel{Et}+\vec{p}\cdot\vec{x})}$$

$$t\to-t,\ \vec{p}\to-\vec{p}\Rightarrow \text{تابع موج}=Ne^{-i(Et-\vec{p}\cdot\vec{x})}\longrightarrow Ne^{-i(-Et+\vec{p}\cdot\vec{x})}=Ne^{i(Et-\vec{p}\cdot\vec{x})}$$

وقتی زمان را منفی می‌کنیم شبیه به این است که فیلم را برعکس کرده‌ایم پس همه تکانه‌ها باید منفی شوند .

کوانتوم خاصیت را وارد مسأله می‌کنیم :

چگالی جریان E.M. : $J^\mu_{em}=qj^\mu$

① از تعمیم رابطه : $j^\mu=2|N|^2p^\mu$

$$\Rightarrow J^\mu_{em}=(+q)2|N|^2(E,\vec{p})$$

برای ذره فرودی که با $e^{-ip\cdot x}$ مشخص می‌شود .

اگر یک ذره با بار + و انرژی منفی داشته باشیم :

$$J^\mu_{em}=(+q)2|N|^2(-E,\vec{p})$$

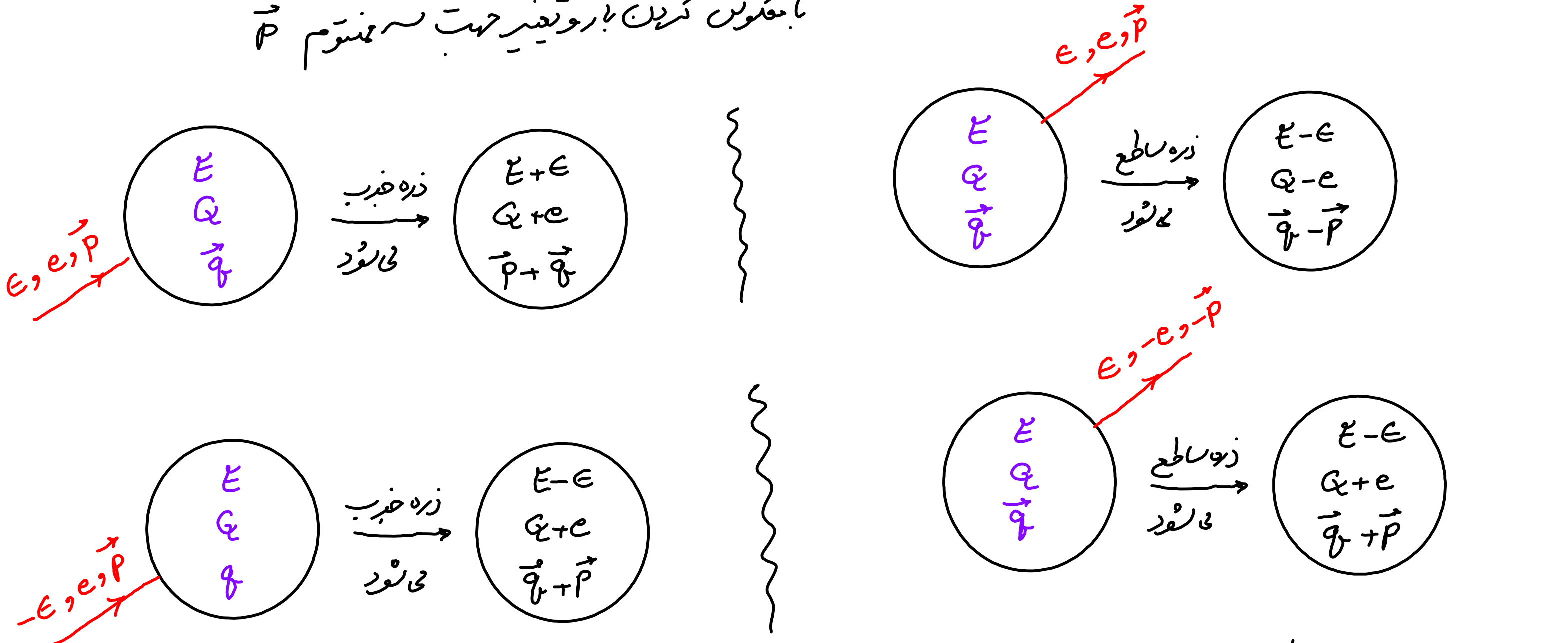
$$\xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{انرژی را مثبت}} J^\mu_{em}=(-q)2|N|^2(+E,-\vec{p})$$

outgoing

پس الآن یک پادذره خروجی داریم .

قانون برای تبدیل انرژی های منفی غیرفیزیکی به انرژی های مثبت: ذرات را با انرژی های مثبت در نظر می‌گیریم اما ذره را به پاد ذره تغییر دهیم

با معکوس کردن بار و تغییر جهت سه تکانه $\vec{p}$



جذب یک ذره با انرژی منفی $\equiv$ دفع یک پاد ذره با انرژی مثبت

حل عام معادله K.G : $\varphi(x) = ($ ذره ورودی با انرژی $+) + ($ پاد ذره خروجی با انرژی $+)$

$$e^{-i(Et-\vec{p}\cdot\vec{x})} \qquad\qquad e^{+i(Et-\vec{p}\cdot\vec{x})}$$

* مسأله 6.1 را حل کنید

فصل ۷: مثال‌هایی از لاگرانژی

Massless scalar field

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\,\partial_\mu\varphi \qquad , \qquad \partial_\mu\varphi(x) \equiv \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^\mu}$$

انرژی جنبشی

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 = \frac{1}{2}\left\{(\partial_0\varphi)^2 - (\vec{\nabla}\varphi)^2\right\}$$

برای ساده سازی روابط

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0 \quad , \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} = \partial^\mu\varphi$$

$$\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\,\partial_\mu\varphi = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\nu\varphi)(\partial_\mu\varphi) \longrightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} = \underbrace{\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\underbrace{\frac{\partial(\partial_\nu\varphi)}{\partial(\partial_\mu\varphi)}}_{\delta_{\mu\nu}}(\partial_\mu\varphi)}_{\partial_\nu\varphi \;\to\; \partial^\mu\varphi} + \frac{1}{2}\underbrace{g^{\mu\nu}(\partial_\nu\varphi)}_{\partial^\mu\varphi}\times 1$$

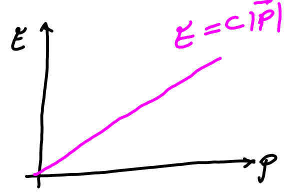
$$\longrightarrow 0 - \partial_\mu(\partial^\mu\varphi) = 0 \Longrightarrow \partial^2\varphi = 0$$

معادله K.G بدون جرم

$$\longrightarrow \varphi(\vec{x},t) = \sum_p a_p\, e^{-i(E_p t - \vec{p}\cdot\vec{x})}$$

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = c|\vec{p}| \qquad (m \to 0)$$

معادله پاشندگی



Massive scalar field $\longrightarrow U(\varphi)$: پتانسیل

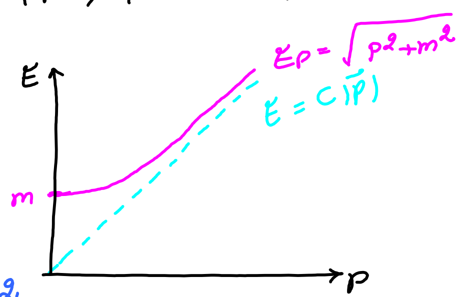
$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - \tfrac{1}{2}m^2\varphi^2$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} = 0 \quad , \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} = \partial^\mu\varphi \quad , \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = -m^2\varphi$$

$$\Longrightarrow -m^2\varphi - \partial_\mu\partial^\mu\varphi = 0 \longrightarrow (\underbrace{\partial_\mu\partial^\mu} + m^2)\varphi = 0$$: معادله K.G

$\Box = \partial^2$

معادله اینشتین : $E_p^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2$



$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$$

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) \longrightarrow \partial_\mu\partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \Box$$

External source

فرض کنید میدان اسکالر با پتانسیل خارجی برهم کنش می‌کند $\longleftarrow -J(x)\varphi(x)$

$J(x)$: source current

$$\mathcal{L} = \underbrace{\tfrac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2}_{\text{انرژی جنبشی}} - \underbrace{\tfrac{1}{2}m^2\varphi^2 + J(x)\varphi(x)}_{\text{پتانسیل}}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} &= -m^2\varphi + J(x) \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} &= \partial^\mu\varphi \end{aligned}\right\} \longrightarrow \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}}_{-m^2\varphi+J(x)} - \partial_\mu\overbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}}^{\partial^\mu\varphi} = 0 \Longrightarrow -m^2\varphi + J(x) - \partial^2\varphi = 0$$

$$\Longrightarrow (\partial^2 + m^2)\varphi(x) = J(x)$$

φ^4 theory

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \tfrac{1}{2}m^2\varphi - \tfrac{1}{4!}\overset{\text{قدرت برهم کنش}}{\lambda}\varphi^4$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = -m^2\varphi - \tfrac{1}{3!}\lambda\varphi^3 \longrightarrow (\partial^2 + m^2)\varphi = -\tfrac{1}{3!}\lambda\varphi^3$$

Two scalar fields

ذرات جرم یکسان m دارند.

$$U(\varphi_1, \varphi_2) = \underset{\text{قدرت برهم کنش}}{g}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2 = g(\underbrace{\varphi_1^4 + \varphi_2^4}_{\text{حالت خود برهم کنشی}} + 2\underbrace{\varphi_1^2\varphi_2^2}_{\text{برهم کنش دو میدان}})$$

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_1)^2 - \tfrac{1}{2}m^2\varphi_1^2 + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_2)^2 - \tfrac{1}{2}m^2\varphi_2^2 - g(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2$$

$$\ast\quad \begin{array}{l} \varphi_1 \longrightarrow \varphi_1' \\ \varphi_2 \longrightarrow \varphi_2' \end{array} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

* به عنوان ماتریس نشان دهید لاگرانژی تحت تبدیل فوق ناوردا است (تبدیل *) ← ماتریس چرخش به اندازه θ در صفحه $\varphi_1 - \varphi_2$

لاگرانژی دارای تقارن $SO(2)$ است.

special ↙ ↘ orthogonal: متعامد

$SO(2)$: گروه ماتریس‌های متعامد با دترمینان 1 در فضای دوبعدی.

ماتریس متعامد: $AA^T = A^TA = \mathbb{1}$

$$\det(AA^T) = \det(\mathbb{1}) = 1 \longrightarrow \det A \cdot \underbrace{\det A^T}_{\det A} = 1 \Longrightarrow (\det A) = \mp 1$$

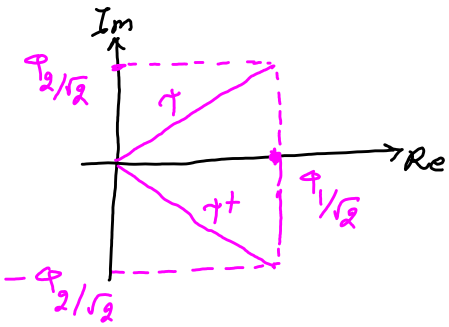
$\det A = -1$ → improper rotation

$\det A = +1$ → proper rotation

Complex scalar field

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2)$$

$$\psi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2)$$



$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\underline{(\partial_\mu\varphi_1)^2} - \tfrac{1}{2}\underline{\underline{m^2}}\varphi_1^2 + \tfrac{1}{2}\underline{(\partial_\mu\varphi_2)^2} - \tfrac{1}{2}\underline{\underline{m^2}}\varphi_2^2 - g(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2$$

$$\tfrac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_1)^2 + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_2)^2 = \partial^\mu\psi^\dagger\partial_\mu\psi = \tfrac{1}{2}\left\{(\partial^\mu\varphi_1 - i\partial^\mu\varphi_2)(\partial_\mu\varphi_1 + i\partial_\mu\varphi_2)\right\}$$

$$\tfrac{1}{2}m^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) = m^2\psi^\dagger\psi \qquad -g(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2 = -g(\psi^\dagger\psi)^2$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L} = \partial^\mu\psi^\dagger\partial_\mu\psi - m^2\psi^\dagger\psi - g(\psi^\dagger\psi)^2$$ → لاگرانژی میدان اسکالر مختلط

$$\left.\begin{array}{l} \psi \to \psi e^{i\alpha} \\ \psi^\dagger \to e^{-i\alpha}\psi^\dagger \end{array}\right\} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$$: لاگرانژی تحت تقارن $U(1)$ ناوردا است

$U(1)$: گروه ماتریس 1×1 یکانی (unitary) → $uu^\dagger = 1$ و $u = e^{i\alpha}$

از نظر ریاضی، دو گروه $U(1)$ و $SO(2)$ یکریخت (ایزومورف) هستند.

مثال: یک تئوری سه ذره‌ای داریم: ذره اسکالر مختلط با جرم m. ذرات φ و ψ از طریق تابع $\varphi\psi\psi^\dagger g$ برهم‌کنش می‌کنند. ذره اسکالر با جرم M

$$\mathcal{L} = \underbrace{\tfrac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \tfrac{1}{2}M^2\varphi^2}_{\text{ذره اسکالر با جرم } M} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\partial^\mu\psi^\dagger\partial_\mu\psi - m^2(\psi^\dagger\psi)}_{\text{ذره اسکالر مختلط با جرم } m} \underbrace{-g\psi^\dagger\psi\varphi}_{\text{تابع برهم‌کنش}}$$

* مسائل 7.1 و 7.4 را حل کنید.