نمودارهای فاینمن

جلسه قبل بررسی کردیم که میدانهای شبح به میدانهای پیمانه‌ای جفت می‌شوند. مسأله قابل توجه دیگری نیز وجود دارد که میدانهای پیمانه‌ای در تئوری‌های غیرآبلی به خودشان نیز جفت می‌شوند. این یعنی که ما در لاگرانژی یک جمله حداقل با توان ۳ از A_μ داریم.

قبلاً در فصل ۴، شدت میدان غیرآبلی را به این شکل تعریف کرده بودیم:

$$[D_\mu, D_\nu] = G_{\mu\nu} \quad \text{و} \quad G_{\mu\nu} = G^a_{\mu\nu} T^a = (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu) T^a$$

$$G_{\mu\nu} \xrightarrow{\text{تحت تبدیلات}} G'_{\mu\nu} = S G_{\mu\nu} S^{-1}$$

کنش باید یک کمیت ناوردای لورنتس باشد. فرض کنید که یک مشاهده‌گر مسیری برای یک ذره مشاهده می‌کند یعنی ذره روی یک مسیر فیزیکی حرکت می‌کند. قطعاً ناظرهای دیگر نیز باید مسیر فیزیکی حرکت ذره را مشاهده کنند. پس ناوردایی لورنتس در معادلات حرکت باید وجود داشته باشد. به این ترتیب، کنش باید یک اسکالر لورنتسی باشد.

$G_{\mu\nu}$ یک تانسور مرتبه ۲ است پس $G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}$ یک اسکالر را به ما می‌دهد. حال ناوردایی تحت تبدیلات پیمانه‌ای را بررسی می‌کنیم:

$$G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \longrightarrow G'_{\mu\nu} G'^{\mu\nu} = S G_{\mu\nu} S^{-1} S G^{\mu\nu} S^{-1}$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که تحت تبدیلات پیمانه‌ای ناوردایی نداریم ولی اگر Trace بگیریم، تحت این تبدیلات نیز اسکالر خواهیم داشت:

$$\to \mathcal{L} = -\tfrac14 \mathrm{Tr}\, G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} = -\tfrac12 G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu b} \underbrace{\mathrm{Tr}(T^a T^b)}_{T^a_{ij} T^b_{ji} = \frac12 \delta^{ab}} = -\tfrac14 G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu a}$$

$$\to \mathcal{L} = -\tfrac14 (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu)(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu b} + g f^{amn} A^{\mu m} A^{\nu n})$$

$$= -\tfrac14 \{ \underbrace{\text{quadratic term}} + 2g f^{abc} \underbrace{A^b_\mu A^c_\nu}_{\mathrm{I}} (\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a}) + g^2 f^{abc} \underbrace{f^{amn} A^b_\mu}_{\mathrm{II}} A^c_\nu A^{\mu m} A^{\nu n} \}$$

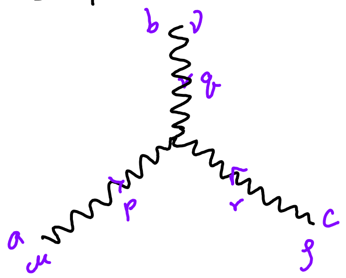
مشخص است که اگر $f^{abc} = 0$ باشد، تعریف شدگی میدانهای پیمانه‌ای را نداریم.

این را قبلاً بدست آوردیم:

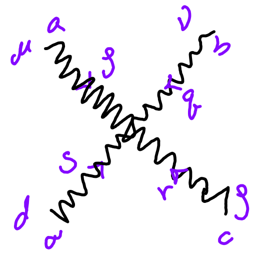
$$\hookrightarrow -\frac{1}{k^2}\left[g_{\mu\nu} + (\alpha - 1)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]\delta^{ab}$$

جمله درجه سوم I، در فضای ممنتوم این را می‌دهد:

$$-2g f^{abc}\left[(r_\mu - q_\mu) g_{\nu\rho} + (p_\nu - r_\nu) g_{\mu\rho} + (q_\rho - p_\rho) g_{\mu\nu}\right]$$



برای جمله درجه چهارم II داریم :



$$-g^2\left[f^{abe}f^{cde}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}-g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})+\cdots\right]$$

رابطه 7.58 کتاب

* این روابط را بدست آورید.

کوپل شدن میدان‌های پیمانه‌ای با فرمیون‌ها

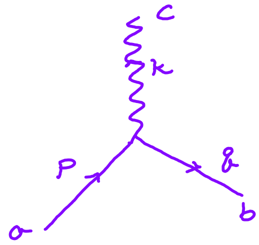
برای این منظور باید ∂_μ را با D_μ جایگزین کنیم:

$$D_\mu=\partial_\mu-igA_\mu^a T^a$$

پس در لاگرانژی باید این جمله را داشته باشیم :

$$\bar\psi_a(i\gamma^\mu D_\mu-m)_{ab}\psi_b=\bar\psi_a(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)(1)_{ab}\psi_b+gA_\mu^c\bar\psi^a(T^c)_{ab}\gamma^\mu\psi^b$$

این جمله انتشارگر فرمیونی را می‌دهد که بدست آورده بودیم : $\frac{i\delta_{ab}}{\gamma\cdot p-m}$



$-ig\gamma_\mu(T^c)_{ab}$

$\downarrow$ QED

$-ie\gamma_\mu$

مسئله مهم این قوانین، شبح‌های F.P. هستند. همانطور که قبلاً گفتیم، شبح‌ها فقط در حلقه‌های میانی نمودارها ظاهر می‌شوند. می‌توان پیمانه‌ای انتخاب کرد که این میدان‌های شبح در آن پیمانه ظاهر نشوند (مثل QED)

Gauge field propagator in the axial gauge

پیمانه محوری : $F^\mu=t^\mu A_\mu^a=0$; $t^\mu t_\mu=-1 \rightsquigarrow$ space-like

حالت قبل داشتیم . $F^a[A_\omega]=\frac{\partial F[A_\mu^a]}{\partial A_\mu^b}\delta A_\mu^b=\delta^{ab}t^\mu\left[f^{bcd}A_\mu^c\omega^d+\partial_\mu\omega^b\right]$

از جلسه پیش

$$=f^{acd}\overset{\text{صفر}}{t^\mu A_\mu^c}\omega^d+\delta^{ab}t^\mu\partial_\mu\omega^b=M\omega$$

(از جلسه قبل): $M_{ac}=\frac{\partial F^a}{\partial A_\mu^b}D_\mu^{bc}$ و $(D_\mu\omega)^b=\delta A_\mu^b \longrightarrow M_{ab}=t^\mu\partial_\mu\delta^{ab}$

در این M، A_μ ظاهر نشده است. پس در رابطه زیر می‌توان انتگرال روی η و $\bar\eta$ را گرفت.

$$\det iM=\int\mathcal{D}\eta\,\mathcal{D}\bar\eta\,\exp\left[-i\int\bar\eta^a M_{ab}\eta^b dx\right]$$

به این ترتیب در رابطه 7.47، قسمت مربوط به شبح‌ها جدا انتگرال‌گیری می‌شود که یعنی شبح‌ها از میدان پیمانه‌ای decouple شده‌اند.

و اما این کار منجر به این می‌شود که انتشارگر میدان‌های پیمانه‌ای در این حالت، نسبتاً مشکل بدست می‌آیند.

$$\mathcal{L}_{eff}=\mathcal{L}+\mathcal{L}_{G.F.}=-\frac14G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu a}-\frac{1}{2\alpha}(t^\mu A_\mu^a)^2$$

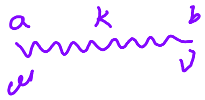
* این محاسبات انجام شود.

$\longrightarrow$ جمله درجه دوم : $\frac12\int A^{\mu a}\left(\Box g_{\mu\nu}-\partial_\mu\partial_\nu-\frac1\alpha t_\mu t_\nu\right)A^{\nu a}dx$

در فضای تکانه : $-k^2g_{\mu\nu}+k_\mu k_\nu-\frac1\alpha t_\mu t_\nu$

حال باید معکوس این جبر را بدست آوریم که برابر است با :

$$-\frac{1}{k^2}\left[g^{\mu\nu} + \frac{(t^2+\alpha k^2)k^\mu k^\nu}{(k.t)^2} - \frac{k^\mu t^\nu + t^\mu k^\nu}{(k.t)}\right]$$

$\alpha \to 0$: 

$$-\frac{i}{k^2}\left[g^{\mu\nu} + \frac{t^2}{(k.t)^2}k^\mu k^\nu - \frac{k^\mu k^\nu + t^\mu k^\nu}{k.t}\right]\delta^{ab}$$

در این پیمانه تعداد دیاگرام‌ها کمتر است و شبح‌ها هم وارد نمی‌شوند ولی چون انتشارگرها پیچیده هستند، آن را کنار می‌گذاریم.

Self energy operator and vertex function

با داشتن قوانین فاینمن، می‌توانیم دامنه هر فرآیندی تا هر مرتبه اختلال را محاسبه کنیم. در فصل قبل دیدیم که چگونه در تئوری اختلال به محاسبات مربوط به تابع دو نقطه، چهار نقطه و ... رسیدیم و سپس محاسبات پراکندگی را انجام دادیم. اکنون می‌خواهیم که روی همه مراتب اختلال جمع بزنیم و تابع گرین exact را بدست آوریم. برای سادگی با تئوری ϕ^4 کار می‌کنیم که البته تئوری پیمانه‌ای نمی‌باشد.

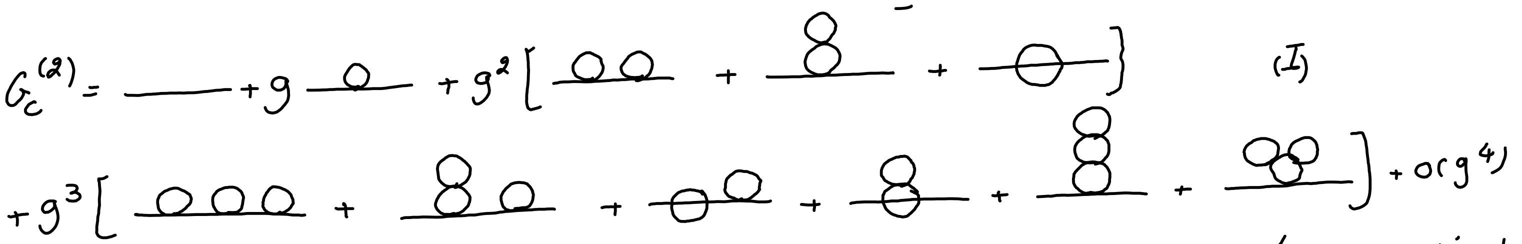
$$\tau(x_1,\dots,x_n) = G^{(n)}(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{i^n}\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\Big|_{J=0}$$: n-point function

این رابطه، شامل دیاگرام‌های متصل و غیرمتصل است. برای بدست آوردن دیاگرام‌های متصل از W به جای Z استفاده می‌کردیم:

$$\phi(x_1,\dots,x_n) = G_c^{(n)}(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{i^n}\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\Big|_{J=0}$$

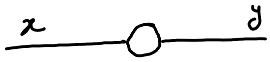
$c \to$ connected

به عنوان مثال برای تابع دو نقطه و برای همه مراتب داریم:



(I)

ما می‌خواهیم روشی پیدا کنیم که همه این‌ها را جمع بزنیم و به این شکل بنویسیم:

$G_c^{(2)}(x,y) =$  Complete or dressed propagator

این دیاگرام‌ها دو دسته می‌شوند، بعضی از آن‌ها با در برداشتن یک internal propagator به دیاگرام‌های مرتبه پایین‌تر تفکیک می‌یابند و برخی دیگر این طور نیستند. به دسته اول one-particle reducible و به دسته دوم one-particle irreducible یا 1PI گفته می‌شود. گراف‌های دسته دوم بنیادی‌تر هستند و گراف‌های دسته اول را می‌توان از به هم چسباندن گراف‌های دسته دوم بدست آورد.

به عنوان مثال گراف  از ضرب این گراف‌ها بدست آمده است:

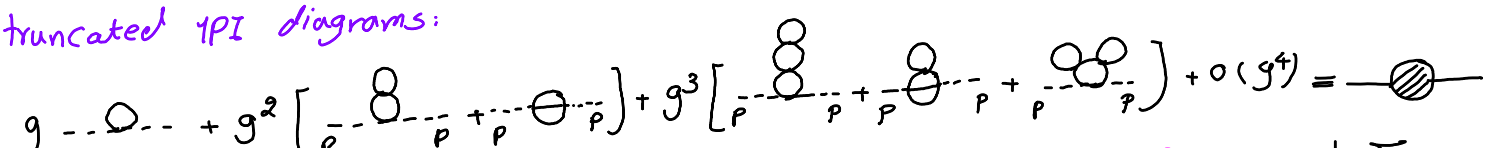
که در واقع ضرب گراف‌های مرتبه پایین‌تر  است. پس این گراف چون دارای یک انتشارگر داخلی است جزو دسته کاهش‌پذیرها قرار می‌گیرد و با قطع کردن انتشارگر تبدیل به دو گراف مرتبه پایین‌تر  می‌شود.

این دو گراف، انتشارگرهای خارجی هستند که در همه گراف‌های دیگر نیز وجود دارند.

حال truncated graphs را تعریف می‌کنیم که در آنها پاهای خارجی را کوتاه می‌کنیم:

truncate

truncated 1PI diagrams:



proper self-energy function: $= \frac{1}{i}\Sigma(p)$

ارتباط $\Sigma(p)$ و G_c

G_0 : ————

به انتشارگرهایی که در آنها برهم‌کنش نداریم، انتشارگر لخت (bare propagator) می‌گوییم:

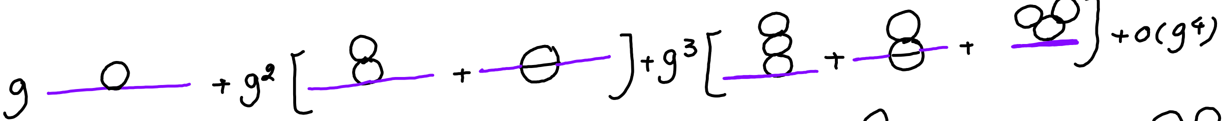
$$G_0(p) = \frac{i}{p^2-m^2}$$

نشان می‌دهیم:

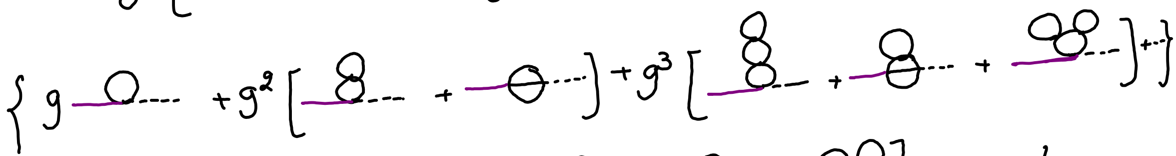
$$G_c^{(2)}(p) = G_0 + G_0\frac{\Sigma(p)}{i}G_0 + G_0\frac{\Sigma(p)}{i}G_0\frac{\Sigma(p)}{i}G_0 + \cdots \qquad \text{II}$$

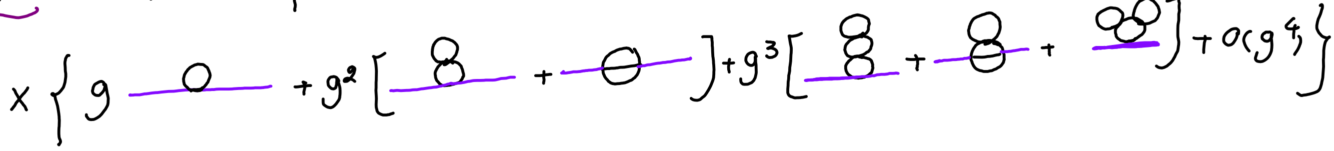
اثبات: G_0 که جمله اول رابطه I را می‌دهد.

$$G_0\frac{\Sigma(p)}{i}G_0 =$$



$$\underbrace{G_0\frac{\Sigma(p)}{i}}G_0\frac{\Sigma(p)}{i}G_0 =$$





به این ترتیب، همه دیاگرام‌های رابطه I بدست می‌آیند.

$$G_0\frac{\Sigma(p)}{i}G_0\frac{\Sigma(p)}{i}G_0 = g^3$$

رابطه II را می‌توان به این صورت نیز نوشت:

در فضای تکانه:

$$G_0 = \frac{i}{p^2-m^2}$$

$$G_0^{-1} = \frac{p^2-m^2}{i}$$

$$G_c^{(2)}(P) = G_0\left(1 + \frac{\Sigma}{i}G_0 + \frac{\Sigma}{i}G_0\frac{\Sigma}{i}G_0 + \cdots\right)$$

$$= \overset{(G_0^{-1})^{-1}}{G_0}\left(1 - \frac{\Sigma}{i}G_0\right)^{-1} = \left(G_0^{-1}(p) - \frac{1}{i}\Sigma(p)\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{p^2-m^2}{i} - \frac{1}{i}\Sigma(p)\right)^{-1} \Rightarrow G_c^{(2)} = \frac{i}{p^2-m^2-\Sigma(p)}$$

پس کلیه دیاگرام‌هایی که تابع دو نقطه را تشکیل می‌دهند، از این رابطه بدست می‌آیند.

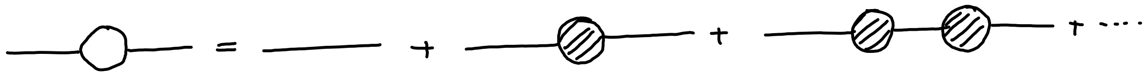
انتشارگر بدون برهم‌کنش $\frac{i}{p^2-m^2} \longrightarrow$ با برهم‌کنش $\frac{i}{p^2-m_{phys}^2}$; $m_{phys}^2 \equiv m^2 + \Sigma(p)$

bare mass $\longrightarrow$ physical mass

در اینجا همه واگرایی‌ها را در جرم جذب کرده‌ایم.

در توابع 4-نقطه نیز می‌توان این ها را در ثابت کوپلینگ جذب کرد و اگر در همه مراتب بتوان این کار را کرد، تئوری بازبهنجارپذیر است.

نمایش دیاگرامی رابطه II را به این شکل می‌توان نوشت:



$p^2-(m^2+\Sigma(p)) \equiv \Gamma^{(2)}(p)$: 2-point vertex function $\rightarrow$ عکس تابع دونقطه است

$$\Gamma^{(2)}(p)\, G_c^{(2)}(p) = i$$

حال این عکس را تعمیم می‌دهیم و به دنبال تابعی مولدی می‌گردیم که $\Gamma^{(n)}(p)$ را تولید کند.

داشتیم : $\varphi^{(1)}(x) = \frac{1}{i}\underbrace{\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}}_{\varphi(x,J)}\Big|_{J=0} \longrightarrow \varphi(x,J)\Big|_{J=0} = G^{(1)}(x)$

$$\varphi^{(2)}(x,y) = \frac{1}{i^2}\underbrace{\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x)\,\delta J(y)}}_{i\,G_c(x,y,J)}\Big|_{J=0} \longrightarrow G_c(x,y,J) = -i\,\frac{\delta\varphi(x,J)}{\delta J(y)}$$

ادعا می‌کنیم که $\Gamma[\varphi(x,J)]$ تابعی مولد است :

$$\Gamma[\varphi(x,J)] = W[J] - \int dx\, J(x)\,\varphi(x,J) \quad ①$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi(x)} = \underbrace{\cancel{\frac{\delta W[J]}{\delta\varphi(x)}}}_{\underbrace{\int \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)}}_{\text{از رابطه ①}}\frac{\delta J(y)}{\delta\varphi(x)}\,dy} - \int dy\, \cancel{\frac{\delta J(y)}{\delta\varphi(x)}}\,\varphi(y,J) - J(x) = -J(x)$$

از رابطه ① :

$$\lim_{\epsilon\to 0} 1/\epsilon \left[\Gamma(\cancel{\varphi}) + \int dx\left(\cancel{J(x)} + \epsilon\,\delta(x-y)\right)\varphi(x) - \cancel{\Gamma(\varphi)} - \int dx\, \cancel{J(x)}\,\varphi(x)\right] = \varphi(y)$$

$$\longrightarrow \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\varphi(x)\,\delta\varphi(y)} = -\frac{\delta J(x)}{\delta\varphi(y)} \equiv \overset{\text{kernel}}{\Gamma(x,y)}$$

نشان می‌دهیم که $\Gamma(x,y)$ معکوس $G_c(x,y)$ است.

$$\int G_c(x,z)\,\Gamma(z,y)\,dz \overset{?}{=} i\,\delta(x-y)$$

$$\int G_c(x,z)\,\Gamma(z,y)\,dz = +i\int \frac{\delta\varphi(x)}{\delta J(z)}\,\frac{\delta J(z)}{\delta\varphi(y)}\,dz = i\,\frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(y)} = i\,\delta(x-y) \quad ② \quad ✓$$

حال در مورد توابع سه‌نقطه نشان می‌دهیم.

داریم : $\frac{\delta}{\delta J(x'')} = \int dz'' \frac{\delta\varphi(z'')}{\delta J(x'')}\,\frac{\delta}{\delta\varphi(z')} = i\int dz''\, G_c(z'',x'')\,\frac{\delta}{\delta\varphi(x'')}$

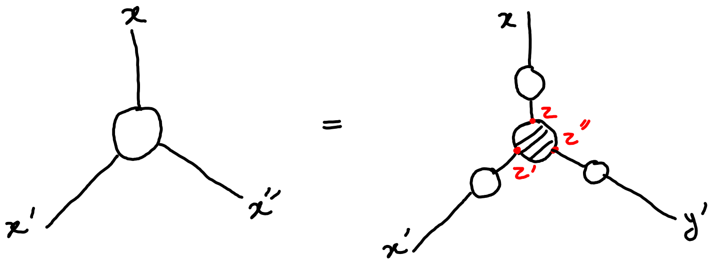
از رابطه ② نسبت به $J(x'')$ با توجه به فرمول بالا مشتق می‌گیریم :

$$\frac{\delta}{\delta J(x'')}\int \underbrace{G_c(x,z)}_{-i\frac{\delta^2 W}{\delta J(x)\,\delta J(z)}}\Gamma(z,z')\,dz = -i\int \frac{\delta^3 W}{\delta J(x)\,\delta J(z)\,\delta J(x'')}\,\Gamma(z,z')\,dz + i\int dz\,dz''\, G_c(x,z) \times G_c(z'',x'')\,\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\varphi(z)\,\delta\varphi(z')\,\delta\varphi(z'')} = 0$$

طرفین را در $G_c(x',z')$ ضرب کرده و روی z' انتگرال می‌گیریم :

$$\int dz\, \frac{\delta^3 W}{\delta J(x)\,\delta J(z)\,\delta J(x'')}\overbrace{\int dz'\,\Gamma(z,z')\,G(x',z')}^{\text{از رابطه ②} :\ \delta(x'-z)} - \int dz\,dz'\,dz''\, G(x,z)\,G(x',z')\,G(x'',z'')\,\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\varphi(z)\,\delta\varphi(z')\,\delta\varphi(z'')} = 0$$

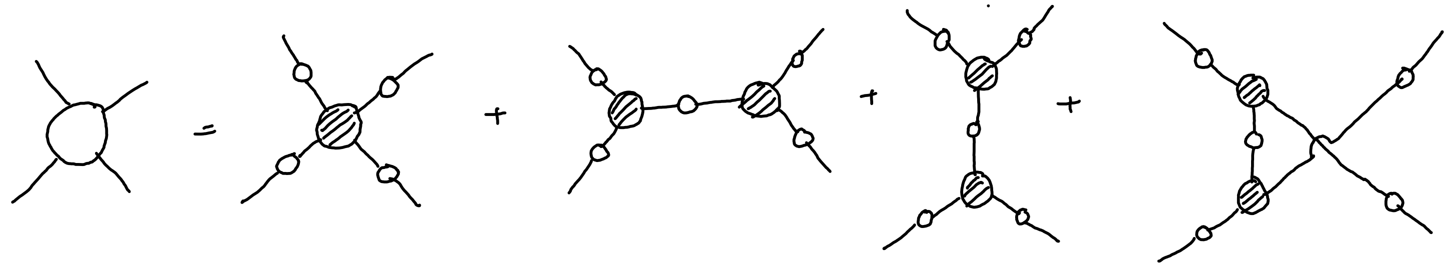
$$\Longrightarrow \frac{\delta^3 W}{\delta J(x)\,\delta J(x')\,\delta J(x'')} = \int dz\, dz'\, dz''\, G(x,z)\, G(x',z')\, G(x'',z'')\, \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta\varphi(z)\,\delta\varphi(z')\,\delta\varphi(z'')}$$



این رابطه نشان می‌دهد که تابع ۳ نقطه متصل هاست

تابع 3-point vertex 1PI است:

از این رابطه یک بار دیگر مشتق بگیریم، تابع چار نقطه بدست می‌آید:



این نمودارها نشان می‌دهند که تئوری را می‌توان برحسب $W[J]$ یا $\Gamma[\varphi]$ بیان کرد.

ارتباط بین Γ و W مثل ارتباط لاگرانژی و هامیلتونی است.

$$\mathcal{H}(x,p) = p\dot{x} - \mathcal{L}(x,\dot{x})$$

$$\dot{x} \longrightarrow J \qquad\qquad \mathcal{L}(x,\dot{x}) \longrightarrow W(x,J)$$

$$p \longrightarrow \varphi \qquad\qquad \mathcal{H}(x,p) \longrightarrow -\Gamma(x,\varphi)$$

تبدیل لژاندر: $\longrightarrow -\Gamma = \int \varphi J - W$

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \longrightarrow \varphi = \frac{\partial W}{\partial J}$$

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \longrightarrow J = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi}$$

تبدیل لژاندر در ترمودینامیک نیز بسیار کاربرد دارد: در واقع ارتباط بسیار نزدیکی بین QFT و SM وجود دارد.

Ward-Takahashi Identities

این معادله، روابط دقیقی بین تابع ورتکس 1PI و انتشارگرها را نشان می‌دهد که برای همه مراتب اختلال درست است. از ناوردایی پیمانه‌ای QED حاصل می‌شود و نقش کلیدی در اثبات بازبهنجارش این تئوری ایفا می‌کند.

$$Z = N \int \mathcal{D}A_\mu\, \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\bar{\psi}\, \exp\left[i \int \mathcal{L}_{eff}\, dx\right]$$

$$\mathcal{L}_{eff} = -\tfrac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2 + J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta$$

تبدیلات پیمانه‌ای موضعی :

$$\begin{cases} A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda \\ \psi \longrightarrow \psi - ie\Lambda\psi \\ \bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi} + ie\Lambda\bar{\psi} \end{cases}$$

جملات اول تا سوم تحت این تبدیلات، ناوردا هستند ولی جمله G.F. و نیز جملات source تحت این تبدیلات ناوردا نمی‌باشند. باید این لاگرانژی تحت تبدیلات پیمانه‌ای ناوردا باشد که این روند، سه معادله W.T. را می‌دهد.

$$\mathcal{L}_{eff} \xrightarrow{G.T.} \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2\alpha}\underbrace{\left[\partial^\mu(A_\mu + \partial_\mu\Lambda)\right]^2}_{(\partial\cdot A + \Box\Lambda)^2 = (\partial\cdot A)^2 + (\Box\Lambda)^2 + 2\,\partial\cdot A\,\Box\Lambda} + J^\mu(A_\mu + \partial_\mu\Lambda) + \bar{\eta}(\psi + ie\Lambda\psi) + (\bar{\psi} - ie\Lambda\bar{\psi})\eta$$

0 تا مرتبه اول جملات را حفظ می‌کنیم.

$$\mathcal{L}_{eff} \longrightarrow \mathcal{L}_{eff} - \frac{1}{\alpha}\partial\cdot A\,\Box\Lambda + J^{\mu}\partial_{\mu}\Lambda - ie\Lambda(\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta)$$

$$e^{i\int\mathcal{L}_{eff}} \longrightarrow e^{i\int\mathcal{L}_{eff}}\, e^{\underbrace{i\int(-\frac{1}{\alpha}\partial\cdot A\Box\Lambda + \cdots + \cdots)}}$$

$$\exp\ \text{خط} = 1 + i\int\left[-\tfrac{1}{\alpha}\partial\cdot A\Box\Lambda + \cdots + \cdots\right] + O(\Lambda^2)$$

$$= e^{i\int\mathcal{L}_{eff}} + e^{i\int\mathcal{L}_{eff}}\ \overbrace{i\int\Big[\underbrace{-\tfrac{1}{\alpha}\partial\cdot A\Box\Lambda}_{I} + \underbrace{\cdots}_{II} + \cdots\Big]}^{B} \quad ۳$$

$$\Longrightarrow Z \xrightarrow{G.T.} Z + Z(\Lambda)$$

ما خواهیم تحت تبدیل پیمانه‌ای، Z تغییر نکند. پس باید $Z(\Lambda) = 0$

$$I = -\tfrac{1}{\alpha}\int \underbrace{(\partial\cdot A)}_{u}\,\underbrace{\partial^{\mu}\partial_{\mu}\Lambda}_{dv}\, d^4x = -\tfrac{1}{\alpha}(\partial\cdot A)\partial_{\mu}\Lambda\Big|_{\text{سطح}}^{0} + \tfrac{1}{\alpha}\underbrace{\int \overbrace{\partial^{\mu}(\partial\cdot A)}^{u}\,\overbrace{\partial_{\mu}\Lambda}^{dv}\, d^4x}$$

$$\partial^{\mu}(\partial\cdot A)\Lambda\Big|_{\text{سطح}}^{0} - \int\partial_{\mu}\partial^{\mu}(\partial\cdot A)\Lambda\, d^4x$$

انتگرال گیری جزء به جزء به شکل بالا

$$II = \int J^{\mu}\partial_{\mu}\Lambda\, d^4x = -\int(\partial_{\mu}J^{\mu})\Lambda\, d^4x$$

$$B = \int\overbrace{\left[-\tfrac{1}{\alpha}\Box(\partial\cdot A) - \partial\cdot J - ie(\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta)\right]}^{M(A,\psi,\bar{\psi})}\Lambda(x)\, d^4x$$

$$Z(\Lambda) = iN\int\Lambda(x)d^4x\int\mathcal{D}A_{\mu}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\, M(A,\psi,\bar{\psi})$$

چون می‌خواهیم $Z(\Lambda)$ به ازای هر Λ برابر صفر باشد، پس $M(A,\psi,\bar{\psi}) = 0$

برای کار کردن روی رابطه ۳ باید از روابط مقابل استفاده کرد:

$$f(A_{\mu})\, e^{i\int\mathcal{L}_{eff}} = f\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^{\mu}}\right)e^{i\int\mathcal{L}_{eff}}$$

$$f(\psi)\ \ '' \ = f\left(\tfrac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}\right)\ ''$$

$$f(\bar{\psi})\ \ '' \ = f\left(-\tfrac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta}\right)\ ''$$

پس به این ترتیب، رابطه ۳ را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\left\{-\tfrac{1}{\alpha}\Box\left(\partial^{\mu}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^{\mu}}\right) - \partial^{\mu}J_{\mu} - \cancel{i}e\left(\bar{\eta}\,\cancel{\tfrac{1}{i}}\,\delta/\delta\bar{\eta} + \cancel{\tfrac{1}{i}}\underbrace{\frac{\delta}{\delta\eta}\eta}_{-\eta\,\delta/\delta\eta}\right)\right]Z = 0$$

$$Z = e^{iW} \longrightarrow \frac{\delta Z}{\delta J^{\mu}} = i\frac{\delta W}{\delta J^{\mu}}Z$$

$$\Longrightarrow\left\{\frac{1}{\alpha}\Box\left(\partial^{\mu}\frac{\delta W}{\delta J^{\mu}}\right) - (\partial^{\mu}J_{\mu}) - ie\left(\bar{\eta}\frac{\delta W}{\delta\bar{\eta}} - \eta\frac{\delta W}{\delta\eta}\right)\right\}Z = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\alpha}\Box\left(\partial^{\mu}\frac{\delta W}{\delta J^{\mu}}\right) - (\partial^{\mu}J_{\mu}) - ie\left(\bar{\eta}\frac{\delta W}{\delta\bar{\eta}} - \eta\frac{\delta W}{\delta\eta}\right) = 0 \quad ۴ \qquad ; \quad W = W[\eta, \bar{\eta}, J]$$

این رابطه را به رابطه‌ای برای توابع vertex تبدیل می‌کنیم.

$$\Gamma[\varphi(x), J] = W[J] - \int J(x)\,\varphi(x,J)\,dx$$

طبق میدان‌های بوزونی این رابطه را بدست آورده بودیم :

$$\varphi(x,J) = \frac{\delta W}{\delta J} = G^{(1)} \quad , \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi(x)} = -J(x)$$

در مورد میدان‌های فرمیونی و A_μ نیز روابط مشابه را می‌نویسیم :

$$\Gamma[\psi, \bar\psi, A_\mu] = W[J, \eta, \bar\eta] - \int dx\,(\bar\eta\psi + \bar\psi\eta + J^\mu A_\mu)$$

$$A^\mu(x) = \frac{\delta W}{\delta J^\mu} \quad , \quad \bar\psi(x) = \frac{\delta W}{\delta \eta} \quad , \quad \psi(x) = \frac{\delta W}{\delta \bar\eta}$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu} = -J^\mu(x) \quad , \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi} = -\bar\eta(x) \quad , \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar\psi} = -\eta(x)$$

به این ترتیب، رابطه ④ را می‌توان به این صورت نوشت :

$$-\frac{1}{\alpha}\Box\,\partial^\mu A_\mu(x) + \partial^\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu} + ie\left(\psi(x)\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi(x)} - \bar\psi(x)\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar\psi(x)}\right) = 0$$

از این رابطه یک بار نسبت به $\bar\psi(x_1)$ و بعد نسبت به $\psi(y_1)$ مشتق می‌گیریم :

$$\frac{\delta}{\delta \bar\psi(x_1)}[\cdots] = \partial^\mu \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar\psi(x_1)\,\delta A^\mu} + ie\,\psi(x)\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar\psi(x_1)\,\delta\psi(x)} - ie\,\delta(x-x_1)\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\psi(x)} - ie\,\bar\psi(x)\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar\psi(x_1)\,\delta\bar\psi(x)} = 0$$

$$\frac{\delta^2}{\delta\psi(y_1)\,\delta\bar\psi(x_1)}[\cdots]\Big|_{\psi=\bar\psi=A_\mu=0} = \partial^\mu \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\psi(y_1)\,\delta\bar\psi(x_1)\,\delta A_\mu(x)} + ie\,\delta(x-y_1)\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(x_1)\,\delta\psi(x)} + ie\,\underbrace{\psi(x)}_{0}\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\psi(y_1)\,\delta\bar\psi(x_1)\,\delta\psi(x)}$$

$$- ie\,\delta(x-x_1)\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(y_1)\,\delta\bar\psi(x)} - ie\,\underbrace{\bar\psi(x)}_{0}\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\psi(y_1)\,\delta\bar\psi(x_1)\,\delta\bar\psi(x)} = 0$$

اکنون این عبارت را در $\psi = \bar\psi = A_\mu = 0$ حساب می‌کنیم

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\underbrace{\frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta\psi(y_1)\,\delta\bar\psi(x_1)\,\delta A_\mu(x)}} = -ie\,\delta(x-y_1)\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\psi(x_1)\,\delta\psi(x)} + ie\,\delta(x-x_1)\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\psi(y_1)\,\delta\bar\psi(x)} \qquad (I)$$

(1PI) electron-photon vertex

|||

$$\Gamma^{(3)}_\mu(x_1, y_1, x)$$

این جملات نیز عکس انتشارگر هستند.

روابط را در فضای مومنتم می‌نویسیم :

$$\Gamma^{(3)}_\mu(x_1,y_1,x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int dp\,dq\,dq'\,e^{i(q'\cdot x + p\cdot y_1 + q\cdot x)}\,\tilde\Gamma_\mu(q',p,q)$$

$$\tilde\Gamma_\mu(q',p,q) = \int \Gamma^{(3)}_\mu(x_1,y_1,x)\,e^{-i(q'\cdot x + p\cdot y_1 + q\cdot x)}\,dx\,dx_1\,dy_1 = ie(2\pi)^4\,\delta(p+q+q')\,\Gamma_\mu(q',p,q) \quad *$$

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar\psi(x_1)\,\delta\psi(y_1)} = \Gamma^{(2)}(x_1,y_1)$$

به همین ترتیب:

$$\int \Gamma^{(2)}(x_1,y_1)\, e^{-i(q'x_1+py_1)}\, dy_1\, dx_1 = (2\pi)^4\, \delta(q'+p)\, \Gamma(p,q')$$

$$q' \equiv -p' \Longrightarrow \int \Gamma^{(2)}(x_1,y_1)\, e^{i(p'x_1-py_1)}\, dx_1\, dy_1 = (2\pi)^4\, \delta(p-p')\, \underbrace{\Gamma(p,-p')}_{i S_F'^{-1}(p)}$$

Connected 2-point function: $S_F'(p) \longrightarrow S_F'(p)\,\Gamma^{(2)}(p) = i$

طرفین رابطه I را در $e^{i(p'x_1-py_1-qx)}$ ضرب کرده و روی x_1 و y_1 و x انتگرال می‌گیریم:

$$-\frac{\partial}{\partial x^\mu} e^{-iq\cdot x} = iq_\mu\, e^{-iq\cdot x}$$

$$\int \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\delta^3\Gamma[\circ]\, dx_1 dy_1 dx}{\delta\psi(y_1)\,\delta\bar\psi(x_1)\,\delta A_\mu(x)} = -ie\int \delta(x-y_1)\frac{\delta^2\Gamma[\circ]}{\delta\psi(x_1)\,\delta\psi(x)}dx_1dy_1dx + ie\int\delta(x-x_1)\frac{\delta^2\Gamma[\circ]}{\delta\psi(y_1)\,\delta\bar\psi(x)}dx_1dy_1dx$$

$$S_F = \tau(x,y) = \left.\frac{\delta^2 Z}{\delta\bar\eta\,\delta\eta}\right|_{\eta=\bar\eta=0}$$

$$L.H.S = -iq_\mu e\,(2\pi)^4\,\delta(p'-p-q)\,\Gamma_\mu(p,q,-p')$$

$$S_F' = \tau_c(x,y) = \left.\frac{\delta^2 W}{\delta\eta\,\delta\bar\eta}\right|_{\eta=\bar\eta=0}$$

$$R.H.S = ie(2\pi)^4\left\{ i\,\delta(p'-p-q)\,S_F'^{-1} - i\,\delta(p'-p-q)\,S_F'^{-1}(p+q)\right\}$$

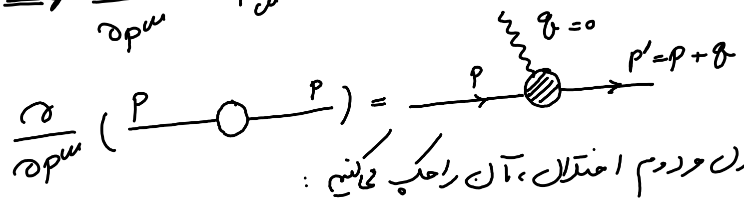
$$iS_F'^{-1} = \Gamma(p) = \left.\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar\psi\,\delta\psi}\right|_{\psi=\bar\psi=0}$$

$$\Longrightarrow \boxed{q^\mu\,\Gamma_\mu(p,q,p+q) = S_F'^{-1}(p+q) - S_F'^{-1}(p)}$$ Ward-Takahashi Identity

داریم: $$\frac{\partial S_F'^{-1}(p)}{\partial p^\mu} = \lim_{q\to 0} \frac{1}{q}\left[S_F'^{-1}(p+q) - S_F'^{-1}(p)\right]$$

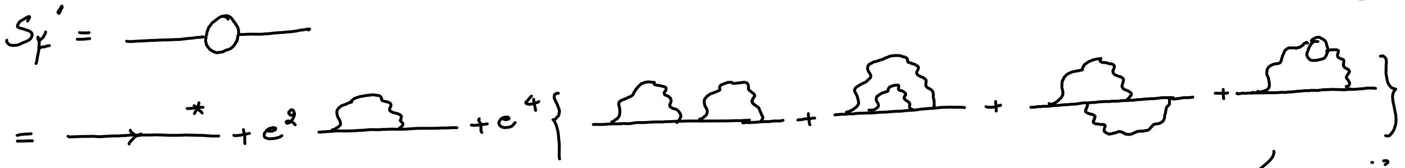
اگر $q_\mu \to 0 \Longrightarrow \dfrac{\partial S_F'^{-1}}{\partial p^\mu} = \Gamma_\mu(p,0,p)$: Ward Identity

به صورت نموداری نگاه می‌کنیم:



این رابطه کاملاً غیر اختلالی است ولی در مرتبه اول و دوم اختلال، آن را چک می‌کنیم:

دیاگرام‌های متصل دو نقطه‌ای:

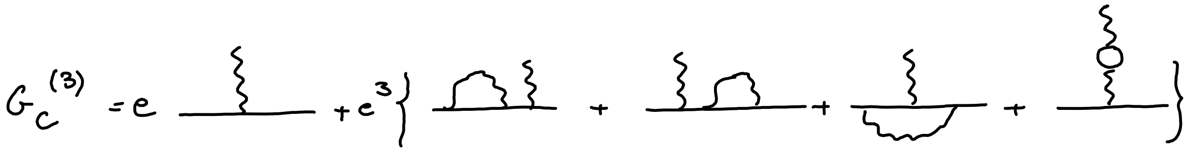


از نمودار * مشخص است که در پایین‌ترین مرتبه، S_F' همان انتشارگر S_F است. پس:

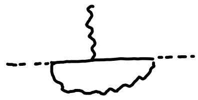
$$S_F^{-1}(p) = \gamma^\mu p^\mu - m \Longrightarrow \partial S_F^{-1}(p)/\partial p^\mu = \gamma^\mu$$

پس طبق رابطه ward باید داشته باشیم: $\Gamma_\mu(p,0,p) = \gamma_\mu$ که این را چک می‌کنیم.

دیاگرام‌های متصل سه نقطه‌ای:



تابع ورتکس سه نقطه‌ای که از روی 1PI ساخته می‌شود:

$\Gamma^{(3)} = e$  $+ e^3$ 

در ابتدا، رابطه 7.89 کتاب را به مورد خودمان تعمیم می‌دهیم که در آن $\Gamma^{(2)}$ ها عکس انتشارگر هستند.

$$\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar\psi(x_1)\,\delta\psi(y_1)\,\delta A^\mu(x)} = -\int du_1\,dv_1\,du\; \underbrace{\Gamma^{(2)}(u_1,x_1)}_{iS_F^{-1}(u_1-x_1)}\,\underbrace{\Gamma^{(2)}(v_1,y_1)}_{iS_F^{-1}(v_1-y_1)}\,\underbrace{\Gamma^{(2)}(u,x)}_{iD^{-1}_{\mu\nu}(u-x)}\;\frac{\delta^3 W[\eta,\bar\eta,J]}{\delta\eta(u_1)\,\delta\bar\eta(v_1)\,\delta J(u)}$$

$$W = -i\ln Z \implies \delta^3 W = i\,\delta^3 Z$$

$$\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar\psi(x_1)\,\psi(y_1)\,\delta A^\mu(x)} = -\int du_1\,dv_1\,du\; S_F^{-1}(u_1-x_1)\,S_F^{-1}(v_1-y_1)\,D^{-1}_{\mu\nu}(u-x)\;\underbrace{\frac{\delta^3 Z[0]}{\delta\eta(u_1)\,\delta\bar\eta(v_1)\,\delta J^\nu(u)}}\qquad **$$

این جمله یعنی نسبت به Z این مشتقات گرفته شود و پس source ها را برابر صفر قرار گیرند و با Z_0 متفاوت است.

وقتی برهم‌کنش داشتیم: $Z = e^{i\int \mathcal{L}_{int}(\phi \to i\delta/\delta J)}\, Z_0$

در مسئله ما جمله برهم‌کنش $e\bar\psi\gamma_\mu\psi A^\mu$ است. پس می‌نویسیم:

$$Z[\eta,\bar\eta,J_\mu] = N\exp\left[ie\int dz\,\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta(z)}\gamma^\lambda\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar\eta(z)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^\lambda(z)}\right]Z_0$$

$$Z_0 = \exp\left[-i\int dx\,dy\,\underbrace{\bar\eta(x)S_F(x-y)\eta(y)}_{\text{مربوط به الکترون‌ها}}\right]\exp\left[-\frac{i}{2}\int dx\,dy\,\underbrace{J^\mu(x)D_{\mu\nu}(x-y)J^\nu(y)}_{\text{مربوط به فوتون‌ها}}\right]$$

(مرتبه e)

$$Z = ie\int dz\,\underbrace{(1/i)^3}_{+i}\,\frac{\delta}{\delta\eta(z)}\gamma^\lambda\frac{\delta}{\delta\bar\eta(z)}\,\frac{\delta}{\delta J^\lambda(z)}\,Z_0 \qquad e^{-i\int dx\cdots + \frac{i}{2}\int dx\,dy\cdots}$$

$$= -e\int dz\,\frac{\partial}{\partial\eta(z)}\gamma^\lambda\frac{\partial}{\partial\bar\eta(z)}\left\{-i\int dx\,dy\;\delta(x-z)\,g^{\mu\lambda}D_{\mu\nu}(x-y)J^\nu(y)\right\}Z_0$$

$$= -e\int dz\,\frac{\partial}{\partial\eta(z)}\gamma^\lambda\left\{-i\int dy\,D_{\lambda\nu}(z-y)J^\nu(y)\right\}\left\{-i\int dy\,S_F(z-y)\eta(y)\right\}Z_0$$

$$= +e\int dz\left\{\int dy\,\gamma^\lambda D_{\lambda\nu}(z-y)J^\nu(y)\right\}\underbrace{\frac{\partial}{\partial\eta(z)}\left\{\int dy\,S_F(z-y)\eta(y)\right\}Z_0}$$

$$\left\{S_F(0) - i\int dy\,S_F(z-y)\eta(y)\int dx\,\bar\eta(x)S_F(x-z)\right\}Z_0$$

$$\left.\frac{\delta^3 Z}{\delta\eta(u_1)\,\delta\bar\eta(v_1)\,\delta J(u)}\right|_{\eta=\bar\eta=J=0} = -e\int dz\left\{\underbrace{\gamma^\lambda D_{\lambda\nu}(z-u)S_F(0)}_{\text{از ترم دیاگرام خلأ صرف‌نظر می‌کنیم}} - i\gamma^\lambda D_{\lambda\nu}(z-u)\,S_F(z-u_1)\,S_F(v_1-z)\right\}$$

$$\implies \frac{\delta^3 Z[0]}{\delta\eta(u_1)\,\delta\bar\eta(v_1)\,\delta J(u)} = -ie\int dz\,S_F(u_1-z)\,S_F(v_1-z)\,D_{\nu\lambda}(u-z)\,\gamma^\lambda$$

در رابطه ** قرار می‌دهیم:

$$\frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta\bar\psi(x_1)\,\delta\psi(y_1)\,\delta A^\mu(x)} = ie\int dz\,du_1\,dv_1\,du\; S_F^{-1}(u_1-x_1)\,S_F(u_1-z)\,S_F^{-1}(v_1-y_1)\,S_F(v_1-z)\,\times$$

$$D^{-1}_{\mu\nu}(u-x)\, D_{\nu\lambda}(u-z)\, \gamma^{\lambda}$$

داریم : $\int S_F(z-u_1)\, S_F^{-1}(u_1-x_1)\, du_1 = \delta(z-x_1)$

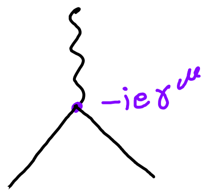
$$= ie \int dz\, \delta(z-x_1)\, \delta(z-y_1)\, \delta_{\mu\lambda}\, \delta(z-x)\, \gamma^{\lambda} = ie\, \delta(x_1-y_1)\, \delta(x_1-x)\, \gamma_{\mu}$$

از رابطه ★ داریم :

$$ie(2\pi)^4\, \delta(p'-p-q)\, \Gamma_{\mu}(p,q,p') = \int dx_1\, dy_1\, dx\, e^{i(p'x_1-py_1-qx)}\, \frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta\bar{\psi}(x_1)\, \delta\psi(y_1)\, \delta A^{\mu}(x)}$$

$$= ie\int dx\, e^{i(p'-p-q)x}\, \gamma_{\mu} = ie\,(2\pi)^4\, \delta(p'-p-q)\, \gamma_{\mu}$$

$$\longrightarrow \Gamma_{\mu}(p,q,p+q) = \gamma_{\mu} \checkmark$$



پس پایین‌ترین مرتبه تابع ورتکس مستقل از ممنتوم q است .