جلسه ششم: ذره باردار در میدان E.M. ← معادلات ماکسول

Note Title ۱۳۹۹/۰۲/۱۰

توضیحات نسبیتی

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L\,dt \longrightarrow S=\int \underbrace{L\gamma\, d\tau}_{\text{ناوردای لورنتس}}$$

جرم ذره برابر m است.

کنش تحت تبدیلات لورنتس باید ناوردا باشد. چون معادلات حرکت از کنش بدست می‌آیند و نشان دهنده مسیر حرکت فیزیکی ذره می‌باشند پس همه ناظرها درمورد این حرکت باید متفق‌القول باشند.

τ: proper-time: زمان ویژه

داشتیم: $$\underbrace{ds^2}_{\text{فاصله بین دو رویداد}} = c^2dt^2-\underbrace{(dx^2+dy^2+dz^2)}_{d\vec{x}^2} = c^2 d\tau^2 \Longrightarrow d\tau=\frac{ds}{c} \longrightarrow \Delta\tau=\int\frac{ds}{c}$$

ناوردای لورنتس

در چارچوب سکون ذره نوشته شده rest frame

proper time interval

$$\Longrightarrow \Delta\tau=\int\frac{1}{c}\sqrt{c^2dt^2-(d\vec{x})^2}=\int dt\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2}=\int dt\sqrt{1-v^2(t)/c^2}=\int\frac{dt}{\gamma(t)}$$

جرم در حال سکون

$$L=\frac{-mc^2}{\gamma} \rightsquigarrow$$ این لاگرانژی در سرعت‌های پایین رابطه درست را می‌دهد.

$$\Longrightarrow S=\int_{\tau_1}^{\tau_2}(-mc^{\cancel{2}})\underbrace{d\tau}_{ds/c} = -mc\int_a^b ds$$

ds یک اسکالر لورنتس است ولی $\int ds$ لزوماً ناوردای لورنتس نیست

اصل کمترین کنش: $\delta S=0 \Longrightarrow \delta\int_a^b ds=0$

$$\vec{x}_0=\vec{x}_F \Longrightarrow ds_1=c\,dt$$

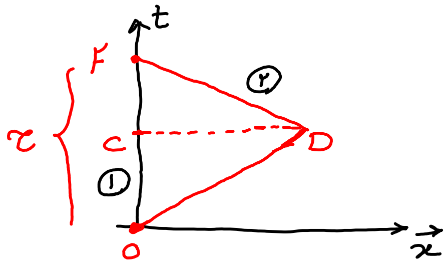
$$\int_1 ds = c\int_1 dt = c\tau$$

$$c\,dt\sqrt{1-\frac{1}{c^2}(d\vec{x}/dt)^2}\ ;\ d\vec{x}/dt=\vec{v}$$

$$\int_2 ds=\int_{OD}+\int_{DF}=\int_{OD}\sqrt{c^2dt^2-d\vec{x}^2}+\int_{DF}\sqrt{\cdots} \qquad \frac{d\vec{x}}{dt}=-\vec{v}$$

$$=2\int_{OD}c\,dt\sqrt{1-v^2/c^2}=\cancel{2}c\sqrt{1-v^2/c^2}\underbrace{\int_{OD}dt}_{\tau/\cancel{2}}=\frac{c\tau}{\gamma}$$

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}>1$$



$\int ds$ روی مسیر ۱ بزرگتر از مسیر ۲ است ← مسیر مستقیم انتگرال کنش را اکسترمم می‌کند.

انرژی و تکانه ذره

$$p=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}} \Longrightarrow \vec{p}=\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}=\frac{\partial}{\partial\vec{v}}\left\{-mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}\right\}$$

$$=+mc^{\cancel{2}}\left(\tfrac{1}{\cancel{2}}\right)\left(+\cancel{2}\vec{v}/\cancel{c^2}\right)\left(1-v^2/c^2\right)^{-1/2}=\gamma m\vec{v}$$

$$H=\sum_i p_i\dot{q}_i - L \longrightarrow E = H = p\cdot\vec{v} - L = \gamma m v^2 + \frac{mc^2}{\gamma} = \gamma m c^2 \left\{ v^2/c^2 + \underbrace{\gamma^{-2}}_{1-v^2/c^2} \right\} = \gamma m c^2$$

چاربردار تکانه : $p^\mu = (E/c \,,\, \vec{p}) = (\underbrace{\gamma m c}_{p^0} ,\, \gamma m \vec{v})$ و $p_\mu = (E/c \,,\, -\vec{p})$

ذره‌ای به جرم m و بار الکتریکی q را در میدان E.M. قرار می‌دهیم.

چاربردار : $A^\mu = \left(\frac{V(x)}{c} \,,\, \vec{A}(x) \right)$

در Q.M غیرنسبیتی : $L = \frac{1}{2} m v^2 \overbrace{- q V(\vec{x},t) + q\, \vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{x},t)}^{\text{پتانسیل}} \longrightarrow \vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right)$

کنش غیرنسبیتی مربوط به پتانسیل $= \int (q\,\vec{v}\cdot\vec{A} - qV)\,dt$ ⟶ در نسبیت باید به شکل هموردا نوشته شود $\underset{\sim}{\vec{v}}$

$$A_\mu dx^\mu = \left(\frac{V(\vec{x})}{c} ,\, -\vec{A}(\vec{x})\right)(c\,dt ,\, d\vec{x}) = V dt - \vec{A}\cdot d\vec{x} = dt\left(V - \vec{A}\cdot \frac{d\vec{x}}{dt}\right)$$

$$\Longrightarrow S = \underbrace{-mc\int \overset{c\,dt/\gamma}{ds}}_{\text{مربوط به انرژی جنبشی}} \underbrace{- q\int A_\mu dx^\mu}_{\text{مربوط به پتانسیل}} = \int \left(-mc^2 \frac{dt}{\gamma} + q\,\vec{v}\cdot\vec{A}\,dt - qV dt\right)$$

$$\Longrightarrow S = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\left(-\frac{mc^2}{\gamma} + q\,\vec{v}\cdot\vec{A} - qV\right)}_{L}dt \qquad \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \gamma m \vec{v} + q\vec{A}$$

L : لاگرانژی نسبیتی

میدان‌های $\vec{E}$ و $\vec{B}$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \quad , \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V \quad ①$$

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t} ,\, -\vec{\nabla}\right) \qquad A^\mu = (\overset{A_0}{V} ,\, \overset{A_1, A_2, A_3}{\vec{A}})$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t} ,\, \vec{\nabla}\right) \qquad A_\mu = (V ,\, -\vec{A})$$

تانسور میدان (مرتبه ۲ پادمتقارن) : $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\vec{B} = (B^1, B^2, B^3) \qquad \vec{E} = (E^1, E^2, E^3)$$

$$\mu=0, \nu=1 \longrightarrow F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = \frac{\partial(-A_x)}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} = E^1$$

$$① : E_x = -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}V$$

$$\mu=2, \nu=0 \Longrightarrow F_{20} = \partial_2 A_0 - \partial_0 A_2 = \frac{\partial}{\partial y}V - \frac{\partial}{\partial t}(-A_y) = \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial t} = -E^2$$

$$① : E_y = -\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\mu=1, \nu=3 \Longrightarrow F_{13} = \partial_1 A_3 - \partial_3 A_1 = \frac{\partial}{\partial x}(-A_z) - \frac{\partial}{\partial z}(-A_x) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial A_z}{\partial x}}_{(\vec{\nabla}\times\vec{A})_y = B^2}$$

ستون صفرم ν

سطر صفرم μ

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \qquad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & \cdots \\ E^1 & 0 & +B^3 & \cdots \\ \vdots & & & \end{pmatrix} = -F_{\mu\nu}$$

$$F^{i0} = -F^{0i} = E^i$$

$$B^i = -\underbrace{\epsilon^{ijk} F^{jk}}_{\text{جمع روی اندیس‌ها نداریم.}} \qquad (B^2 = F^{13})$$

* نکته: اندیس‌های یونانی نشان دهنده $\mu, \nu = 0,1,2,3$ هستند و اندیس‌های لاتین $i, j = 1,2,3$ هستند.

$$B^1 = -\epsilon^{1jk} F^{jk} = -\underbrace{\epsilon^{123}}_{1} F^{23} + \cancel{(-\epsilon^{132} F^{32})} \ \checkmark$$

شکل هموردای لاگرانژی در E.M

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(E^2 + B^2) \longrightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2) \overset{?}{=} -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

$$= -\frac{1}{4}\Big(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \underbrace{\partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu}_{\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu} + \underbrace{\partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu}_{\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu}\Big) \qquad \nu \leftrightarrow \mu$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu)$$

$$A^\mu = (A^0, \vec{A}) \qquad A_\mu = (A_0, -\vec{A}) \qquad \partial^\mu = (\partial^0, -\vec{\nabla}) \qquad \partial_\mu = (\partial_0, \vec{\nabla})$$

$$\nu = \mu = 0 \Longrightarrow \partial_0 A_0 \partial^0 A^0 - \partial_0 A_0 \partial^0 A^0 = 0$$

$$\mu = 0, \nu = i \longrightarrow \partial_0 \underbrace{A_i}_{-A^i} \partial^0 A^i - \partial_0 \underbrace{A_i}_{-A^i} \overbrace{\partial^i}^{-\vec{\nabla}_i} A^0 = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \overbrace{\dot{\vec{A}}}^{} \cdot \vec{\nabla} A^0$$

$$\mu = i, \nu = 0 \Longrightarrow \underbrace{\partial_i}_{\vec{\nabla}_i} A_0 \underbrace{\partial^i}_{-\vec{\nabla}_i} A^0 - \partial_i A_0 \partial^0 A^i = -\vec{\nabla} A_0 \cdot \vec{\nabla} A_0 - \vec{\nabla} A_0 \cdot \dot{\vec{A}}$$

$$\mu = i, \nu = j \Longrightarrow \partial_i \underbrace{A_j}_{-A^j} \underbrace{\partial^i}_{-\vec{\nabla}_i} A^j - \partial_i \underbrace{A_j}_{-A^j} \underbrace{\partial^j}_{-\vec{\nabla}_j} A^i = \vec{\nabla} A^j \cdot \vec{\nabla} A^j - \partial_j \vec{A} \cdot \vec{\nabla} A^i$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\Big(\underbrace{-\dot{\vec{A}}^2 - (\vec{\nabla} A_0)^2 - 2\dot{\vec{A}} \cdot \vec{\nabla} A_0}_{-E^2} \underbrace{- \vec{\nabla} A^i \partial_i \vec{A} + (\vec{\nabla} A^i)^2}_{B^2}\Big\} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2) \ \checkmark$$

حلبه بش: $\pi(x) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\underbrace{\phi}_{\text{میدان}}}} \longrightarrow \pi^i = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = -\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i} = -(\dot{A}^i + \partial^i A^0)$ ↓ برداری

جدایی که $\dot{A}^i$ دارند:

جمله اول $= +\frac{1}{2}\dot{\vec{A}}^2 = \frac{1}{2}(\dot{A}^i)^2$

جمله سوم $= +\dot{\vec{A}} \cdot \vec{\nabla} A_0 = \dot{A}^i \cdot \partial^i A^0$

$$\vec{\pi} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V = \vec{E}$$

$$\vec{E}^2 = \dot{\vec{A}}^2 + (\vec{\nabla} \overset{=V}{A_0})^2 + 2\dot{\vec{A}} \cdot \vec{\nabla} \overset{=V}{A_0}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \Longrightarrow B_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 = (\epsilon_{ijk} \partial_j A_k)(\epsilon_{imn} \partial_m A_n)$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

$$= (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})\partial_j A_k \partial_m A_n = \delta_{jm}\delta_{kn}\partial_j A_k \underbrace{\partial_m A_n}_{\partial_j A_k} - \cdots$$

$$= (\partial_j A_k)(\partial_j A_k) - (\partial_j A_k)(\partial_k A_j) \longrightarrow$$ به صورت برداری $$= (\vec{\nabla} A_k)^2 - \vec{\nabla} A_k \partial_k \vec{A}$$

$$\mathcal{H} = \Pi\dot{\varphi} - \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{H} = \widetilde{\Pi^i \dot{A}_i} - \mathcal{L} = E^2 - \mathcal{L} = \tfrac{1}{2}(E^2 + B^2) \checkmark$$

$V = 0$ فرض کنیم

معادلات ماکسول

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4} F_{\lambda\delta} F^{\lambda\delta} \rightsquigarrow \text{pure gauge}$$

معادله اویلر-لاگرانژ : $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\right] = 0 \quad (\mathrm{II})$$

$$g^{\mu\nu} A_\nu = A^\mu$$
$$g_{\mu\nu} A^\mu = A_\nu$$
$$g^{\lambda\lambda'} F_{\lambda'\delta'} = F^\lambda{}_{\delta'}$$
$$g^{\delta\delta'} F^\lambda{}_{\delta'} = F^{\lambda\delta}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = -\tfrac{1}{4}\frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} F_{\lambda\delta}\underbrace{g^{\delta\delta'}g^{\lambda\lambda'}F_{\lambda'\delta'}}_{F^{\lambda\delta}}$$

$$F_{\lambda\delta} = \partial_\lambda A_\delta - \partial_\delta A_\lambda$$

$$= -\tfrac{1}{4}\Big\{ g^{\delta\delta'}g^{\lambda\lambda'}\overbrace{(\delta_{\nu\lambda}\delta_{\mu\delta} - \delta_{\nu\delta}\delta_{\mu\lambda})}^{\text{مشتق } F_{\lambda\delta}} F_{\lambda'\delta'}$$

$$+ g^{\delta\delta'}g^{\lambda\lambda'}F_{\lambda\delta}\underbrace{(\delta_{\nu\lambda'}\delta_{\mu\delta'} - \delta_{\nu\delta'}\delta_{\mu\lambda'})}_{\text{مشتق } F_{\lambda'\delta'}}\Big\}$$

$\nu = 0, \mu = 1 \longrightarrow \dfrac{\partial(\partial_0 A_1)}{\partial(\dot{A}_x)}$

$\lambda = 1, \delta = 2 \longrightarrow \partial_1 A_2 = \dfrac{\partial A_y}{\partial x}$

$$\frac{\partial(\partial_1 A_2)}{\partial(\partial_0 A_1)} = 0, \quad \frac{\partial(\partial_0 A_1)}{\partial(\partial_0 A_1)} = 1$$

$$= -\tfrac{1}{4}\Big\{(g^{\mu\delta'}g^{\nu\lambda'} - g^{\nu\delta'}g^{\mu\lambda'})F_{\lambda'\delta'}$$

$$+ F_{\lambda\delta}(\underbrace{g^{\delta\mu}g^{\lambda\nu}}_{-F^{\mu\nu}} - g^{\delta\nu}g^{\lambda\mu})\Big\} = -\tfrac{1}{4}\Big\{\underbrace{g^{\nu\lambda'}F_{\lambda'}{}^{\mu}}_{F^{\nu\mu}} - F^{\mu\nu} + F^{\nu\mu} - F^{\mu\nu}\Big\}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\{F^{\nu\mu} - F^{\mu\nu}\} = F^{\mu\nu}$$

$F^{\mu\nu}$ پادمتقارن است : $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$

$$\mathrm{II} \Longrightarrow \boxed{\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0}$$ معادله ماکسول

$$\mu = 0 \Longrightarrow \partial_\nu F^{0\nu} = 0 \longrightarrow \cancel{\partial_0 F^{00}} + \partial_1 \underbrace{F^{01}}_{-E^1} + \partial_2 \underbrace{F^{02}}_{-E^2} + \partial_3 \underbrace{F^{03}}_{-E^3} = 0 \Longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$$

$$\mu = 1 \longrightarrow \partial_\nu F^{1\nu} = 0 \longrightarrow \partial_0 \underbrace{F^{10}}_{+E^1} + \cancel{\partial_1 F^{11}} + \partial_2 \underbrace{F^{12}}_{+B^3} + \partial_3 \underbrace{F^{13}}_{-B^2} = 0$$

$$\Longrightarrow + \partial E_x/\partial t + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}B_z - \frac{\partial}{\partial z}B_y}_{-(\vec{\nabla}\times\vec{B})_x} = 0 \longrightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

اگر در مسأله source داشته باشیم : ρ (چگالی بار الکتریکی) ، $\vec{J}$ (چگالی جریان الکتریکی)

چاربردار جریان : $J^\mu = (\rho, \vec{J})$ — معادله پیوستگی : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \longrightarrow \partial_\mu J^\mu = 0$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \longrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -J^\mu$$

(از معادله اویلر-لاگرانژ) : $-J^\mu - \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\nu F^{\mu\nu} = -J^\mu \longrightarrow \partial_\nu F^{\nu\mu} = J^\mu$

معادله ماکسول

$$\mu = 0 \longrightarrow \partial_\nu F^{0\nu} = -J^0 \longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho$$

$$\mu = i \Rightarrow \partial_\nu F^{i\nu} = -J^i \Rightarrow +\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - (\vec{\nabla}\times\vec{B}) = -\vec{J} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}$$

* مسائل ۵.۴ و ۵.۶ و ۵.۷ این فصل را حل کنید.