

در فصل قبل متوجه شدیم که انتگرال برعکس (پاتری است) که در قیمت توان دو لگوانتوم ظاهر می شود. اکنون می خواهیم همین روش را برای میدانهای پلانکی ای باره کنیم. در این فصل توجه خود را به QED معطوف می کنیم. به دلیل آزادی پلانکی که وجود دارد، با شکلهای روبرو خواهیم شد که قبلاً وجود نداشتند و در روزهای کمترین کافیش در شترال بری، آنرا حل می یابیم.

انتگرال فونون - فرامیسم کانزاس

$$Z[J] = \int D A_\mu e^{i \int (\mathcal{L} + J^\mu A_\mu) dx} \quad \text{و} \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

این لگوانتوم (در غیاب باره است).

چون در فرامیسم $Z[J]$ (شترال روی A_μ است) که برخی (زبان) با هم محال هستند، باید فقط یکی از آن محال ها را حذف کنیم تا شترال و لگوانتوم در رابطه ایون توجه به این مطلب، $Z[J]$ را می یابیم:

$$\frac{\delta}{\delta A_\mu} \mathcal{L} = 0 \Rightarrow \partial_\mu A^\mu - \partial_\nu A^\nu = 0 \quad \text{و} \quad \partial_\mu A^\mu = 0 \quad \text{(از رابطه ماکول در شترال)}$$

$$\partial_\mu A^\mu - \partial_\nu A^\nu = 0 \Rightarrow (\partial_\mu \square - \partial_\nu \partial_\mu) A^\nu = 0$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\underbrace{\partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu}_I - \underbrace{\partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu}_II)$$

$$\int I dx = \int \partial_\mu (A^\nu \partial_\nu A^\mu) dx - \int A^\nu \partial_\mu \partial_\nu A^\mu dx$$

مشتق کامل است.

$$\int II dx = \int \partial_\mu (A^\nu \partial_\nu A^\mu) dx - \int A^\nu \partial_\mu \partial_\nu A^\mu dx$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} [A^\nu \square A^\nu - \underbrace{A^\nu \partial_\mu \partial_\nu A^\mu}_{S_{\mu\nu}}] = \frac{1}{2} A^\mu (\partial_\mu \square - \partial_\nu \partial_\mu) A^\nu \quad **$$

انتشار داریم که انتگرال فونون $(D_{\mu\nu})$ مکرر ایتر در $D_{\mu\nu}$ باشد: $S_{\mu\nu} D^{\nu\lambda}(x-y) = \delta^\lambda_\mu \delta^4(x-y)$

از لحاظ $D_{\mu\nu}$ ، تابع گرین معادله * است.

$$\partial_\mu [\partial_\mu \square - \partial_\nu \partial_\mu] D^{\nu\lambda}(x-y) = \partial_\mu \delta^\lambda_\mu \delta^4(x-y) \Rightarrow \square D = \text{finite}$$

در واقع در این رابطه $\square D$ در حد $\square$ می رود پس مشکلی نیست.

معنی وارون $D_{\mu\nu}$ وجود ندارد. به زبان ماتریس در میان آن صفر است که معنی ویژه مقدار صفر دارد.

اکنون مشخص است که چاروش کار برای میدانهای پلانکی باید مشاقت باشد و بدون حذف A_μ های اضافی این کوانتوم مشکل نمی باشد. مادر QED به کمک gauge fixing این مشکل را حل می کنیم.

Gauge fixing

در بیان نوریت کار می کنیم : $\partial_\mu A^\mu = 0$

$$\star \rightarrow g_{\mu\nu} \square A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\nu = 0 \Rightarrow \square A^\nu = 0 : \text{ معادله حرکت}$$

روشن می کنیم این معادله پراختیام که راگزیری را طوری می نویسیم که این معادله حرکت را برقرار کند :

$$4.74 : \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 = \frac{1}{2} A^\mu \square A_\mu + \text{طرح}$$

gauge fixing term

حال باید وارد عمل ابرانتار $\square A^\mu$ را پیدا کرد که آن را انتگرال می گیریم :

که در واقع شبیه به انتگرال معادله $\square \phi = 0$ است .
توجه کنید که یکس ابرانتار $\square A^\mu$ خودش است .
در غایت بنشینیم این صحت درست است .

$$\partial_\mu = -ik_\mu \Rightarrow S'_\mu = -g_{\mu\nu} k^2$$

$$S'_\mu : (-g_{\mu\nu} k^2) (A g^{\nu\lambda} + B k^\nu k^\lambda) = \delta^\lambda_\mu$$

$$\Rightarrow -A k^2 g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} - B k^2 g_{\mu\nu} k^\nu k^\lambda = \delta^\lambda_\mu \xrightarrow{\text{از قاعده جفت}} B=0, A = -\frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow (S'_\mu)^{-1} = \frac{-g_{\mu\nu}}{k^2}$$

پس ترتیب انتگرال فوگون در فضای مختصات به صورت $D_{\mu\nu}(x-y)$ و در فضای فضا $\frac{-g_{\mu\nu}}{k^2}$ است . توجه کنید که این انتگرال ها در

بیان نوریت نوشته شده است . در این بیان ، فوگون یک بردار پلیراسون ϵ^μ دارند که $\epsilon^\mu k_\mu = 0$ است که نشان می دهد
درجه پلیراسون به نامی آن مشتق است . (حالی که فوگون های فیزیکی فقط دو درجه پلیراسون عرض دارند .
انتگرال انتگرال فوگون های فیزیکی را محاسبه می کنیم و از عرض k^μ می دانیم که باید در بیان تأسیس کار کنیم : $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \phi = 0$

انتگرال فوگون های عرض

$$\star' : \langle 0 | T(A_\mu(x) A_\mu(y)) | 0 \rangle = i D_{\mu\nu}(x-y) : (\text{رابطه جفتی تابع درختی و انتگرال})$$

$$\text{مثلاً با رابطه 6.53 جفتی می کنیم : } \vec{A}(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon^\lambda(k) [a^{(\lambda)}(k) e^{-ikx} + a^{(\lambda)\dagger}(k) e^{ikx}]$$

$$L.H.S = \langle 0 | \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2k'_0} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \epsilon^\lambda_\mu(k) \epsilon^{\lambda'}_\nu(k') [a^{(\lambda)}_\mu(k) e^{-ikx} + a^{(\lambda)\dagger}_\mu(k) e^{ikx}]$$

$$\times [a^{(\lambda')}_\nu(k') e^{-ik'y} + a^{(\lambda')\dagger}_\nu(k') e^{ik'y}] \theta(x_0 - y_0) + [a^{(\lambda')}_\nu(k') e^{-ik'y} + a^{(\lambda')\dagger}_\nu(k') e^{ik'y}] \times$$

$$\times [a^{(\lambda)}_\mu(k) e^{-ikx} + a^{(\lambda)\dagger}_\mu(k) e^{ikx}] \theta(y_0 - x_0) \} = \dots$$

* از رابطه های 4.68 استفاده کنید و رابطه 7.15 را به دست آورید .

$$\langle 0 | T(A_\mu(x) A_\mu(y)) | 0 \rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \epsilon_\nu^{(\lambda)}(k) \left[e^{ik(y-x)} \theta(x_0 - y_0) + e^{ik(x-y)} \theta(y_0 - x_0) \right]$$

برای زبره اسکالر جرم دار:

$$D_F(x) = -i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[\theta(x_0) e^{-ikx} + \theta(-x_0) e^{ikx} \right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

نکته: ϵ نامی که به عنوان جرم است.

$$\Rightarrow \langle 0 | T(A_\mu(x) A_\mu(y)) | 0 \rangle = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_\nu^{(\lambda)} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 + i\epsilon}$$

* $\epsilon_\mu^{(\lambda)} = D_{\mu\nu}$ transverse

نکته: $\epsilon_\mu k^\mu = 0 \rightarrow \epsilon_\mu$: space-like

حال $\sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_\nu^{(\lambda)}$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

a timelike vector: $\eta_\mu = (1, 0, 0, 0)$ و $\eta_\mu \epsilon^\mu = 0$

a space-like " : $\bar{k}^\mu = \frac{k^\mu - (k \cdot \eta) \eta^\mu}{[(k \cdot \eta)^2 - k^2]^{\frac{1}{2}}}$

نکته: $\bar{k}^\mu$ فضائیه است.

$$\bar{k}^\mu \bar{k}_\mu = \frac{k^\mu k_\mu - 2(k \cdot \eta) \eta^\mu k_\mu + (k \cdot \eta)^2 \eta^\mu \eta_\mu}{(k \cdot \eta)^2 - k^2} = \frac{k^2 - (k \cdot \eta)^2}{(k \cdot \eta)^2 - k^2} = -1 \quad \checkmark$$

هم چنین $\bar{k}^\mu \in$ عمود است.

$$\bar{k}^\mu \epsilon_\mu = \frac{k^\mu \epsilon_\mu - (k \cdot \eta) \eta^\mu \epsilon_\mu}{[(k \cdot \eta)^2 - k^2]^{\frac{1}{2}}} = 0$$

به این ترتیب می‌توان با η^μ و $\bar{k}_\mu$ و $\epsilon_\mu^{(1,2)}$ یک پایه‌ای ساخت.
زمانی $\rightarrow$ فضائیه

$$\Rightarrow g_{\mu\nu} = \eta_\mu \eta_\nu - \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_\nu^{(\lambda)} - \bar{k}_\mu \bar{k}_\nu$$

این جبردار سهم به بزرگترین اسکالرهای اسکالرو
طوری هستند.

$$\Rightarrow \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_\nu^{(\lambda)} = -g_{\mu\nu} + \eta_\mu \eta_\nu - \bar{k}_\mu \bar{k}_\nu$$

$$(k \cdot \eta) [k_\mu \eta_\nu + \eta_\mu k_\nu]$$

$$\bar{k}_\mu \bar{k}_\nu = \frac{[k_\mu - (k \cdot \eta) \eta_\mu][k_\nu - (k \cdot \eta) \eta_\nu]}{(k \cdot \eta)^2 - k^2} = \frac{1}{(k \cdot \eta)^2 - k^2} \left\{ k_\mu k_\nu - (k \cdot \eta) k_\mu \eta_\nu - (k \cdot \eta) \eta_\mu k_\nu - k^2 \right\}$$

$$+ (k \cdot \eta)^2 \eta_\mu \eta_\nu \}$$

$$\Rightarrow \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_\nu^{(\lambda)} = -g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{(k \cdot \eta)^2 - k^2} + \frac{(k \cdot \eta) [k_\mu \eta_\nu + \eta_\mu k_\nu]}{(k \cdot \eta)^2 - k^2} + \eta_\mu \eta_\nu \left[1 - \frac{(k \cdot \eta)^2}{(k \cdot \eta)^2 - k^2} \right]$$

اکنون می خواهیم آنچه انجام داده ایم ربه مسائری پیمانی غیر آبی تعمیم دهیم که به آن مسائری Yang-Mills گفته می شود.
 (از روش اشتراک استفاده می کنیم و قوانین برای یافتن انتگرال ها بدیاری کنیم. مشکل نه در گروه آبی $U(1)$ داشتیم (من بود که به دلیل آزادی پیمانی، $\mathcal{Z}$ وائری می شود. راه حل این است که از هر گروه مسائری پیمانی، آبیانی که با یک تبدیل پیمانی به هم مربوط هستند را معادل در نظر بگیریم (تستی پیمانی) $\mathcal{Z}'$

اینها به کلان های پیمانی متفاوت تعلق دارند

$$\bar{A}_\mu = A_\mu + \eta_\mu \lambda \Rightarrow \mathcal{Z} = \int \mathcal{D}A_\mu e^{iS} \sim \int \mathcal{D}\bar{A}_\mu e^{iS} \int \mathcal{D}\lambda \rightarrow \mathcal{Z}' = \frac{\mathcal{Z}}{N}$$

که با انتخاب زمان را سولون درست، N : این به باعث وائری شدن $\mathcal{Z}$ می شود.
 $\mathcal{Z}$ همان $\mathcal{Z}'$ است.

در استادی سری ما ثابت λ انجام می دهیم:

T^a : سولهای گروه پیمانی غیر آبی هستند پس:

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$$

در نتیجه:

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi$$

فرض کنید یک تبدیل U داریم:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = U A_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1} \quad \text{و} \quad A_\mu \equiv A_\mu^a T^a$$

$\varphi(g)$ تابعی از اعضای گروه است که برای اشتراک گیری روی آن با یک measure تعیین کرد.

چون g و g' هر دو عضو یک گروه هستند و اشتراک معادل هم هستند:

این معادل بودن منجر به dg می شود:

$$\int \varphi(g) dg, \int \varphi(g') dg$$

$$g'g = g'' \Rightarrow g = g'^{-1}g''$$

$$\int \varphi(g'g) dg = \int \varphi(g'') d(g'^{-1}g'') = \int \varphi(g) dg = \int \varphi(g') dg'$$

این دینرین ها از اعضای گروه را با یک به عنوان measure دستگیر گرفت.

$$g = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}, \quad g' = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

به عنوان مثال، گروه ماتریس های بالا مثلثی را در نظر بگیرید:

$$gg' = \begin{pmatrix} xa & bx + yc \\ 0 & cz \end{pmatrix}, \quad g'g = \begin{pmatrix} ax & ay + bz \\ 0 & cz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & z' \end{pmatrix}$$

اشتراک روی گروه یعنی اشتراک روی عناصر ماتریس پس در این حدس (است) که measure به صورت $dx dy dz$ باشد.
 با ضرب بست. چون:

$$dx' dy' dz' = d(g'g), \quad dx dy dz = d(g)$$

$$\frac{dx' dy' dz'}{d(g'g)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial x'}{\partial z} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial z} \\ \frac{\partial z'}{\partial x} & \frac{\partial z'}{\partial y} & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{vmatrix} dx dy dz = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} \underbrace{dx dy dz}_{dg} = a^2 c d(g)$$

در صورتی که می خواستیم: $d(g'g) = d(g)$ باشد

حال اگر measure را به صورت $dg = \frac{dx dy dz}{x^2 z}$ تعریف کنیم، داریم:

$$d(g'g) = \frac{dx' dy' dz'}{x'^2 z'} = \frac{\cancel{dx^2} \cancel{dy^2} \cancel{dz^2}}{\cancel{dx^2} \cancel{dy^2} \cancel{dz^2}} = d(g) \quad \checkmark$$

در تبدیلات U کوکب، یافتن measure ساده است: $\rightarrow$ non-abelian index

$$U(\vec{\omega}) = e^{i\omega^a(x) T^a} = 1 + i\omega^a T^a + O(\omega^2)$$

$$U'(\vec{\omega}') U(\vec{\omega}) = (1 + i\omega'^a T^a)(1 + i\omega^b T^b) = 1 + i(\omega' + \omega)^a T^a + O(\omega^2) = U(\vec{\omega}' + \vec{\omega})$$

واضح است: $dg = d\vec{\omega} = \prod_a d\omega^a$

$$\int U(\vec{\omega}' + \vec{\omega}) dg = \int U(\omega) dg \rightarrow$$

حال در مورد میدان بیانه ای A_μ بررسی می کنیم:

$$g A'_\mu = U g A_\mu U^{-1} - i/g (\partial_\mu U) U^{-1} \quad g A_\mu \rightarrow A_\mu$$

$$A'_\mu \rightarrow A_\mu \quad (A_\mu^b T^b + i\omega^c T^c A_\mu^b T^b)$$

$$A_\mu^a T^a \rightarrow A'_\mu^a T^a = (1 + i\omega^c T^c) A_\mu^b T^b (1 - i\omega^d T^d) - i(\partial_\mu \omega^b T^b)(1 - i\omega^c T^c)$$

$$A'_\mu^a T^a = A_\mu^b T^b - i A_\mu^b T^b \omega^c T^c + i\omega^c T^c A_\mu^b T^b + \partial_\mu \omega^b T^b - i\partial_\mu \omega^b T^b \omega^c T^c$$

$$A_\mu^b \omega^c [T^b, T^c] = i f^{bca} T^a$$

$$\rightarrow A'_\mu^a T^a = (A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b \omega^c + \partial_\mu \omega^a) T^a \Rightarrow \mathcal{D}A = \prod_a \prod_\mu dA_\mu^a(x)$$

رابطه است با مورد بالا در مورد تبدیلات U کوکب

حال کوکب می کنیم که $\mathcal{D}A = \mathcal{D}A'$ باشد یعنی measure تحت تبدیلات بیانه ای ناورد است

در صورتی که در مثال برابر است.

حال باید با فکس کردن بیانه، از هر کدسی که A_μ برداریم. رابطه فکس کردن بیانه را به این شکل می نویسیم:

$$F^a[A_\mu] = 0$$

A_μ^a : مانند کدسی

$$F = \partial_\mu A_\mu$$

شده $U(1)$ و در بیانه نورس داریم: $\partial_\mu A_\mu = 0 \Leftarrow F = \partial_\mu A_\mu$

$$A'_\mu^a = A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b \omega^c + \partial_\mu \omega^a$$

delta functional

$$\delta(F^a[A]) = \prod_a \delta(F^a[A(x)])$$

یعنی ضرب تابع رتبی دیگر یک در هر نقطه فضا-زمان

$$D^{-1}[A] \equiv \int \mathcal{D}\vec{\omega} \delta(F[A_\mu]) = \int \mathcal{D}g' \delta(F[A_{g'}])$$

$$A = A_g \Rightarrow D^{-1}[A_g] = \int \mathcal{D}g' \delta(F[A_{gg'}]) = \int \mathcal{D}g' \delta(F[A_g]) = D^{-1}[A]$$

تحت تبدیلات بیانه ای ناورد است

که این یعنی $D^{-1}[A]$ نیز ناوردی بیانه ای است.

$$\Rightarrow D[A] \int \mathcal{D}\vec{\omega} \delta(F[A\vec{\omega}]) = 1$$

حالت این 1 را در رابطه تابع مولد وارد می کنیم:

$$Z = \int \mathcal{D}A e^{iS} = \int \mathcal{D}A \int \mathcal{D}[A] \mathcal{D}\vec{\omega} \delta(F[A\vec{\omega}]) e^{iS[A]}$$

آنست که تبدیل بیانیه ای انجام می دهیم $A\vec{\omega} \rightarrow \vec{A}$ می دانیم که $\mathcal{D}A$ همان $\mathcal{D}A\vec{\omega}$ است چون measure نشان نمی دهد نامرئی بیانیه ای است و همین طور نقش δ می دارد:

$$Z = \int \mathcal{D}\vec{\omega} \int \mathcal{D}A D[A] \delta(F[A]) e^{iS[A]} \rightarrow \text{این دقیقاً همان فرم است که می خواهیم}$$

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu D[A_\mu] \delta(F[A_\mu]) e^{iS}$$

حالت $\vec{A}$ را می بینیم $F^a[A\vec{\omega}]$ را به $F^a[A_\mu]$ ربط می دهیم:

$$F^a[A\vec{\omega}] = F^a[A] + \left(\frac{\partial F^a}{\partial A_\mu^b} \right) \delta A_\mu^b + \dots$$

$$\delta A_\mu^a = (A_\mu)_{\vec{\omega}}^a - A_\mu^a = \omega_\mu^b + f^{abc} A_\mu^b \omega^c = f^{bcd} A_\mu^c \omega^d + \omega_\mu^b \quad \text{II}$$

$$\text{در نتیجه: } A_{\vec{\omega}} = A_\mu^a + \omega_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b \omega^c$$

$$\text{مشتق می گیریم: } D_\mu \vec{\omega} = \omega_\mu^b - i A_\mu^c T^c \vec{\omega} \Rightarrow (D_\mu \vec{\omega})^b = \omega_\mu^b - i A_\mu^c (T^c)_{bd} \omega^d = \omega_\mu^b + f_{bcd} A_\mu^c \omega^d$$

$$\delta A_\mu^b = (D_\mu \vec{\omega})^b = D_\mu^{bc} \omega^c$$

در نتیجه این رابطه با رابطه II، داریم:

$$\Rightarrow F^a[A_{\vec{\omega}}(y)] = \frac{\partial F^a}{\partial A_\mu^b} D_\mu^{bc} \omega_c(y) \quad \text{III}$$

توجه کنید چون تبدیل یابسته است، همه پارامترها تابع مکان هستند

$$\Rightarrow D^{-1}[A] = \int \mathcal{D}\omega^a \delta(F^a[A\vec{\omega}]) = \int \mathcal{D}\omega^a(y) \delta\left(\frac{\partial F^a}{\partial A_\mu^b} D_\mu^{bc} \omega_c(y)\right)$$

$$\frac{\delta F^a[A_\omega(x)]}{\delta \omega^c(y)} \stackrel{\text{III}}{=} \underbrace{\frac{\partial F^a}{\partial A_\mu^b}}_{M_{ac}(x,y)} D_\mu^{bc} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \omega^c(x) + \epsilon \delta(x-y) - \omega^c(y) \right\} = \langle a, x | M | c, y \rangle$$

این تابعیت فضای مکان
برای M است.

این M یک سری ویژه مقدار λ_i دارد.

$$M |i\rangle = \lambda_i |i\rangle \quad \text{و} \quad \int \sum_b dy |b, y\rangle \langle b, y| = 1$$

$$\Rightarrow \int dy \sum_b \underbrace{\langle a, x | M | b, y \rangle}_{M_{ab}(x,y) \delta(x-y)} \langle b, y | i \rangle = \lambda_i \langle a, x | i \rangle$$

$$\Rightarrow \sum_b M_{ab}(x, x) f_b^i(x) = \lambda_i f_a^i(x) \quad \text{IV}$$

چون M بر حسب D است پس هر مستوی است. یعنی هر همگنی را می توان بر حسب مؤلفه حالتی این ابرانوار ربط داد. در اینجا ω^c را به رابطه می دهیم:

$$\omega^c(y) = \sum_i \omega^i f_c^i(y)$$

$$\Rightarrow \delta \left(\frac{\partial F^a}{\partial A_\mu} D_\mu^{bc} \omega^c(y) \right) = \sum_c M_{ac}(y, y) \omega^c(y) = \sum_i \omega^i \underbrace{\sum_c M_{ac}(y, y) f_c^i(y)}_{\text{IV: } \lambda_i f_a^i(y)}$$

$$\Rightarrow D^{-1}[A(y)] = \int \mathcal{D} \omega^a(y) \delta \left(\underbrace{\sum_i \omega^i \lambda_i f_a^i(y)}_{U_a} \right)$$

$$\omega_i \lambda_i = (\omega \lambda)_i$$

$$U_a = \sum_i f_{ai} (\omega \lambda)_i \Rightarrow \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\omega \lambda)_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

زنجار را از روی ω به روی U^a می بینیم پس باید هر دو معنی تبدیل را بکار ببریم.

$$\Rightarrow \text{رابطه ماتریسی: } U = F \times (\omega \lambda) \Rightarrow \omega \lambda = F^{-1} \times U \Rightarrow (\omega \lambda)_i = (F^{-1})_{ij} U_j$$

$$\Rightarrow \omega_i = \frac{1}{\lambda_i} \sum_j F_{ij}^{-1} U_j \Rightarrow \frac{\partial \omega_i}{\partial U_j} = \frac{1}{\lambda_i} F_{ij}^{-1}$$

$$\Rightarrow \det \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial U_j} \right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_1} F_{11}^{-1} & \frac{1}{\lambda_1} F_{12}^{-1} & \dots \\ \frac{1}{\lambda_2} F_{21}^{-1} & \frac{1}{\lambda_2} F_{22}^{-1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}_{N \times N} = \frac{1}{\lambda_1} \dots \frac{1}{\lambda_N} \begin{vmatrix} F_{11}^{-1} & F_{12}^{-1} & \dots \\ F_{21}^{-1} & F_{22}^{-1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial U_j} \right) = (\lambda_1 \dots \lambda_N)^{-1} \det F^{-1} = (\det M)^{-1} (\det F)^{-1}$$

اینجا هم که مؤلفه مقادیر M بودند

$$\Rightarrow D^{-1}[A] = \int \underbrace{\mathcal{D} U_a}_{\mathcal{D} U} \delta U^a (\det M)^{-1} (\det F)^{-1} \Rightarrow D[A] = (\det M) (\det F) \sim \det iM$$

این را می توان خنثی ضریب نرمالیزاسیون کرد.

$$6.128 \text{ رابطه: } \int d\bar{\alpha} d\alpha e^{-\bar{\alpha} A \alpha} = \det A \Rightarrow \det iM = \int \mathcal{D} \eta \mathcal{D} \bar{\eta} e^{-i} \bar{\eta}^a M_{ab} \eta^b dx$$

برای تثبیت بمانیم با بر روی میدانهای η و $\bar{\eta}$ که گراشه هستند، زنجار بگیریم. این محدودیات، Fadeev Popov ghosts نامیده می شوند که میدانهای فکری نیستند و فقط در خصوص داخلی دیده می شوند و در انتگرالها سهم خود را نشان می دهند. (در این رو با بر حسب $\bar{\eta}^a M_{ab} \eta^b$ کرنش دارد شود.

کمی دین تثبیت بمانیم $F^a[A] - c^a(x) = 0$ است. در این صورت:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D} A \underbrace{D[A]}_{\det iM} \delta(F[A] - c) e^{is}$$

معقول است که این $\mathcal{Z}$ را در این فاکتور $e^{-i \int d^4x c_a^2(x)}$ ضرب می کنند (توضیح کنند که این ضرایب را می توان در این ثابت نرمالیزاسیون خنثی کرد)

$$\Rightarrow \mathcal{Z} = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \exp \{ i \int [\mathcal{L} - \frac{1}{2\alpha} F^2 - \bar{\eta}^a M_{ab} \eta^b] d^4x \}$$

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FPG}$$

$$\frac{\partial F^a}{\partial A_\mu^b} \delta A_\mu^b = M_{ab} \omega^a$$

$$\delta A_\mu^a = f^{abc} A_\mu^b \omega^c + \omega_\mu^a$$

اکنون با بهینه‌های مختلف نهایی را حل می‌کنیم.

$$F = \partial^\mu A_\mu = 0 \quad \text{نصف - بهینه نورنیت}$$

$$1) \text{ GED} : f^{abc} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial A_\mu} \delta A_\mu = \partial^\mu \omega_\mu = \square \omega \Rightarrow M = \square$$

$$\mathcal{Z}_{GED} = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} e^{i \int [\mathcal{L} - \frac{1}{2\alpha} (\partial \cdot A)^2] d^4x} e^{-i \int \bar{\eta} \square \eta d^4x}$$

نصف - بهینه A_μ دارند و سهم η و $\bar{\eta}$ را گرفتند و فقط یک ضرب η اضافه می‌کنند.

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial \cdot A)^2$$

$$(*) \text{ رابطه } = \frac{1}{2} \int A^\mu (g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu d^4x$$

$$\text{مجموع} = -\frac{1}{2\alpha} \int \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu d^4x = -\frac{1}{2\alpha} \int \partial_\mu (A^\mu \partial_\nu A^\nu) + \frac{1}{2\alpha} \int A^\mu \partial_\mu \partial_\nu A^\nu d^4x$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} A^\mu [g_{\mu\nu} \square + (\frac{1}{\alpha} - 1) \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu$$

که استیبل فصل این رابطه را برای $\alpha = 1$ گرفته بودیم.

انتشار فوون‌ها را با بهینه زنگ‌ها هم به توان دو در فرم فوون تبدیل آوریم.

$$g_{\mu\nu} \square + (\frac{1}{\alpha} - 1) \partial_\mu \partial_\nu \xrightarrow{\text{فضای فوون}} -k^2 g_{\mu\nu} - (\frac{1}{\alpha} - 1) k_\mu k_\nu = \hat{O}$$

$$\hat{O}^{-1} = A g^{\nu\lambda} + B k^\nu k^\lambda, \quad \hat{O} \hat{O}^{-1} = \delta^\lambda_\mu \Rightarrow \hat{O}^{-1} = -\frac{1}{k^2} [g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}]$$

$$\Rightarrow \text{انتشار فوون} = i \hat{O}^{-1}_{\mu\nu} = \frac{-i}{k^2} [g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}] = \frac{-i}{k^2} g_{\mu\nu} \quad \alpha = 1$$

$$2) \text{ Y.M. Theories} : f^{abc} \neq 0$$

$$(\frac{\partial F^a}{\partial A_\mu^b}) \delta A_\mu^b = \delta_b^a \partial^\mu [f^{bcd} A_\mu^c \omega^d + \omega_\mu^b] = f^{acd} \partial^\mu A_\mu^c \omega^d + f^{acd} A_\mu^c \partial^\mu \omega^d + \square \delta_b^a \omega^b$$

$$= (-f^{abc} \partial^\mu A_\mu^c - f^{abc} A_\mu^c \partial^\mu + \delta_b^a \square) \omega^b = M_{ab} \omega^b$$

$$\mathcal{L}_{FPG} = \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} e^{-i \int \bar{\eta}^a M_{ab} \eta^b d^4x}$$

فقط ثابت کوپلینگ را بهینه بودیم: $g A_\mu \Rightarrow A_\mu$
اینجا ثابت را بهینه کردیم

$$= \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} e^{-i \int \bar{\eta}^a \underbrace{\delta_b^a \square}_{\square \eta^a} \eta^b + i g f^{abc} [\int \bar{\eta}^a (\partial^\mu A_\mu^c) \eta^b + \bar{\eta}^a (\partial^\mu \eta^b) A_\mu^c] d^4x}$$

سکان η یک سکان رها می‌کند است که A_μ کوپل بهینه است.

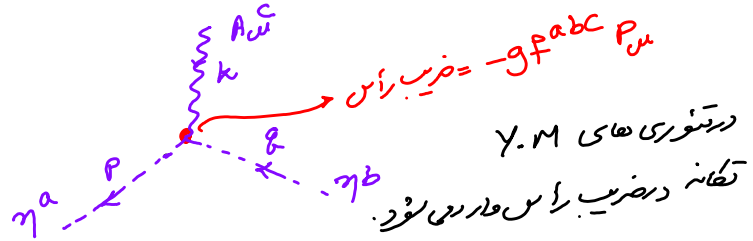
توجه کنید که η و $\bar{\eta}$ گراوان هستند ولی انتگرالی که بدست آوردیم شبیه به بوزون است در حالی که گراوان آمار فستونی دارند. در واقع این موجودات، آمار فستینی را به هم می زنند.

$$\int \bar{\eta} (\partial^\mu \eta) A_\mu + \bar{\eta} (\partial^\mu \eta) A_\mu = \int \partial^\mu (\bar{\eta} \eta A_\mu) - \int (\partial^\mu \bar{\eta}) \eta A_\mu$$

$$\Rightarrow \text{مجموع} = -ig f^{abc} (\partial^\mu \bar{\eta}^a) \eta^b A_\mu^c$$

فضای نستر

$$-g f^{abc} p^\mu \bar{\eta}^a(p) \eta^b(q) A_\mu^c(k)$$



در QED این نمودار وجود ندارد چون η و $\bar{\eta}$ A_μ کوب می شوند.