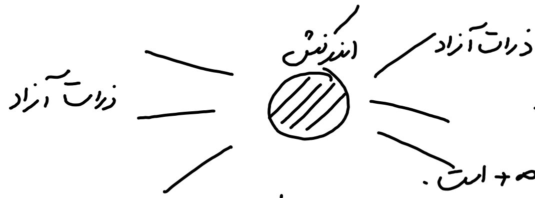
جلسه چهارم: ماتریس S — پراکندگی پایون از نوکلئون — نمودارهای فاینمن و قوانین آن — سطح مقطع پراکندگی

Note Title ۱۳۹۹/۰۱/۱۶

The S matrix and reduction formula

ما تاکنون تئوری‌های برهم‌کنش را بدست آوردیم. اکنون می‌خواهیم کمیاتی را محاسبه کنیم که در آزمایش‌ها به صورت مستقیم بدست می‌آوریم. فرآیندهای پراکندگی، معمول‌ترین فرآیندهایی هستند که مرتبط با ذرات می‌باشند که در آن‌ها سطح مقطع یک برهم‌کنش به خصوص اندازه‌گیری می‌شود یا واپاشی یک ذره به دو یا چند ذره دیگر که در آن lifetime اندازه‌گیری می‌شود. برای محاسبه هر دوی این کمیات باید دامنه احتمال محاسبه شود که در این بخش به آن می‌پردازیم.



فرض می‌کنیم ذرات قبل و بعد از اندرکنش آزاد هستند.

معمولاً حالت اولیه در زمان $-\infty$ و حالت نهایی در زمان $+\infty$ است.

$$\text{دامنه احتمال} = \langle \beta | S(t_i, t_f) | \alpha \rangle = \langle \beta, t \to +\infty | \alpha, t \to \infty \rangle = S_{\beta\alpha}$$

می‌توانیم نوتاسیون را با حالت‌های in و out داشته باشیم:

$$|\alpha\rangle_{in} = |\alpha, t \to -\infty\rangle$$
$$|\beta\rangle_{out} = |\beta, t \to +\infty\rangle \implies S_{\beta\alpha} = {}_{out}\langle \beta | \alpha \rangle_{in}$$

مثلاً اگر در حالت اولیه دو ذره اسکالر داشته باشیم با تکانه‌های $\vec{p}_1, \vec{p}_2$، باید بنویسیم:

$$|\alpha\rangle_{in} = a^{\dagger}_{in}(\vec{p}_1)\, a^{\dagger}_{in}(\vec{p}_2)\, |0\rangle$$

در فرمول‌بندی هایزنبرگ، اپراتورها با زمان متحول می‌شوند و حالت‌ها ثابت می‌مانند. یعنی:

$$A(t) = S^{\dagger}(t, t_0)\, A(t_0)\, S(t, t_0)$$

در چارچوب کانونیک که میدان‌ها اپراتور هستند. پس اگر اپراتورهای میدان ذرات اولیه را φ_{in} و ذرات نهایی را φ_{out} بنامیم، می‌توان نوشت:

$$\varphi_{out} = S^{\dagger} \varphi_{in} S$$

حال می‌خواهیم عبارتی برای اپراتور S پیدا کنیم. با میدان‌های بوزونی شروع می‌کنیم:

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\partial_\mu \varphi\, \partial^\mu \varphi - \tfrac{m^2}{2}\varphi^2 + \mathcal{L}_{int} \longrightarrow \text{معادله اویلر-لاگرانژ:}\ \underbrace{(\Box_x + m^2)}_{K_x}\varphi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \varphi(x)} \quad (\mathrm{I})$$

این معادله‌ای است که باید حل شود.

ابتدا تابع گرین این معادله را می‌یابیم:

$$K_x G(y-x) = \delta^4(x-y) \quad (\mathrm{II}) \quad ; \quad G = -D_F$$

$$(\mathrm{I}) \xrightarrow[G(y-x)]{\times\ \text{از چپ}} - (\mathrm{II}) \xrightarrow[\varphi(y)]{\times\ \text{از چپ}} \int d^4y \left\{ G(y-x)(\Box + m^2)\varphi(y) - \varphi(y)(\Box + m^2) G(y-x) \right\}$$

$$= \underbrace{\int d^4y \left\{ G(y-x) \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \varphi(y)} - \varphi(y)\, \delta^4(x-y) \right\}}_{= \int d^4y\, G(y-x) \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \varphi(y)} - \varphi(x)}$$

$$L.H.S = \int d^4y \left\{ G(y-x) \left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^2} - \nabla_y^2 \right) \varphi(y) - \varphi(y) \left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^2} - \nabla_y^2 \right) G(y-x) \right\}$$

$$= \int d^4y \left\{ G(y-x) \frac{\partial^2 \varphi(y)}{\partial y_0^2} - \varphi(y) \frac{\partial^2 G(y-x)}{\partial y_0^2} \right\} - \underbrace{\int d^4y \left\{ G(y-x) \nabla_y^2 \varphi(y) - \varphi(y) \nabla_y^2 G(y-x) \right\}}_{\int dy_0 \int d^3y\, \vec{\nabla} \cdot (G \vec{\nabla} \varphi - \varphi \vec{\nabla} G)} \to 0$$

این انتگرال را روی سطح می‌بریم که چون در ∞ میدان نداریم برابر صفر می‌شود.

$$\text{جمله اول} = \int d^3y \int dy_0 \frac{\partial}{\partial y_0}\Big(\underbrace{G\frac{\partial \varphi}{\partial y_0} - \varphi\frac{\partial G}{\partial y_0}}_{G\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi(y)}\Big) = \int d^3y\, G\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi\Big|_{y_0^-}^{y_0^+} = \Big(\int_{y_0^+} d^3y - \int_{y_0^-} d^3y\Big) G\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi$$

$$\longrightarrow \varphi(x) = \int \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \varphi(y)} G(y-x)\, d^4y - \Big(\int_{y_0^+} d^3y - \int_{y_0^-} d^3y\Big) G\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi \quad *$$

در واقع ما حل معادله را پیدا کرده‌ایم اما هنوز به آن فرمی که می‌خواهیم نیست. از معادلات دیفرانسیل می‌دانیم که حل عام معادله = جواب معادله میدان آزاد (معادله همگن) + انتگرال تابع گرین × جمله غیرهمگن. تابع گرین unique نیست بلکه به شرایط مرزی بستگی دارد:

retarded Green's function : $D_{ret}(x) = 0$ for $x^2>0$ و $x_0<0$; $(\Box + m^2) D_{\substack{ret\\adv}}(x) = \delta^4(x)$

advanced " " : $D_{adv}(x) = 0$ for $x^2>0$, $x_0>0$

D_{ret}: اطلاعات قبل را داریم و به کمک این تابع گرین، اطلاعات بعد را می‌دهیم.

D_{adv}: " بعد را " " " " " قبل " "

(رابطه 6.56 دانشجو): $D_F(x) = -i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\left\{\theta(x_0)e^{-i\omega_k x_0} + \theta(-x_0)e^{i\omega_k x_0}\right\} \quad *'$

ضریب $\theta(x_0)$، D_{ret} و ضریب $\theta(-x_0)$، D_{adv} را می‌دهند:

$$D_F^{adv}(-x) = -i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i\omega_k x_0} \underset{\vec{k}\to\vec{k}'=-\vec{k}}{=} -i\int \frac{\overset{d^3k}{d^3k'}}{2(2\pi)^3 \underset{\omega_k}{\omega_{k'}}} \underbrace{e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}}}_{e^{+i\vec{k}'\cdot\vec{x}}} e^{-i\omega_{k'} x_0} = D_F^{ret}(x)$$

$$\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2+m^2} \xrightarrow[\vec{k}\to\vec{k}'=-\vec{k}]{} \omega_{k'} = \omega_k$$

$$\longrightarrow \boxed{D_F^{adv}(-x) = D_F^{ret}(x)}$$

روش دیگری برای نشان دادن این رابطه در کلاس گفته شده است.

حال به رابطه * برمی‌گردیم و به جای G، D_{ret} یا D_{adv} را قرار می‌دهیم:

$$\varphi(x) = \int \frac{\partial\mathcal{L}_{int}}{\partial\varphi(y)} \underbrace{D_{adv}(y-x)}_{D_{ret}(x-y)} d^4y - \int_{y_0^+} d^3y\, \underbrace{D_{adv}(y-x)}\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi(y) + \int_{y_0^-} d^3y\, \underbrace{D_{adv}(y-x)}_{D_{ret}(x-y)}\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi(y)$$

این جمله برای $y_0>x_0$ برابر صفر است.

چک می‌کنیم که آیا این جمله، جواب معادله همگن است و $y_0^- \to -\infty$

$$(\Box_x+m^2)\Phi_{-\infty}(x) = \lim_{y_0\to-\infty}\int_{y_0^-} d^3y\, \underbrace{(\Box_x+m^2) D_{ret}(x-y)}_{\delta^4(x-y)}\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi(y)$$

$$= \lim_{y_0\to-\infty}\int d^3y\, \delta^3(x-y)\left\{\delta(x_0-y_0)\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_0} - \frac{\partial\delta(x_0-y_0)}{\partial y_0}\varphi(y)\right\} = 0 \checkmark$$

φ_{in} : همان میدان ورودی است $\varphi_{-\infty}(x)$

$$\Longrightarrow \varphi(x) = \varphi_{in} + \int d^4y\, D_{ret}(x-y)\frac{\partial\mathcal{L}_{int}}{\partial\varphi(y)}$$

از رابطه I: $K_x\varphi(y)$

حال اگر در معادله *، به جای G، D_{ret} را قرار دهیم، بدست می‌آوریم:

$$\varphi(x) = \varphi_{out} + \int d^4y\, D_{adv}(x-y)\, K_x\varphi(y)$$

ما از این شرط استفاده کردیم که $\lim_{x\to\pm\infty}\varphi(x) \longrightarrow \varphi_{\substack{out\\in}}$ که strong asymptotic condition است. نشان داده شده است که با این شرط، ماتریس S بدیهی بدست می‌آید و پراکندگی وجود ندارد.

شکل درست در سال ۱۹۵۵ توسط Lehmann، Symanzik و Zimmermann (LSZ) بدست آمد که شرط ضعیف نامیده می‌شود:

$$\lim_{t\to\pm\infty} \langle a|\varphi(x)|b\rangle = \langle a|\varphi_{\substack{out\\in}}(x)|b\rangle$$

که $|a\rangle$ و $|b\rangle$ حالتی دلخواه در فضای هیلبرت هستند.

به این نکته توجه کنید که شرط قوی، شرط ضعیف را میدهد و عکس آن درست نیست.

حال میخواهیم یک عبارت برای اپراتور S پیدا کنیم که از طریق این رابطه تعریف میشود:

$$\varphi_{out}(x) = S^{+}\varphi_{in}(x) S$$

داشتیم: $Z[J] = N\int e^{i(\mathcal{L}+J\varphi)}\mathcal{D}\varphi = N\int e^{iJ\varphi}e^{i\mathcal{L}}\mathcal{D}\varphi$

$$\langle 0|T(\underline{\varphi(x)\varphi(y)})|0\rangle = N\int \underline{\varphi(x)\varphi(y)e^{i\mathcal{L}}}\mathcal{D}\varphi$$

$$\Rightarrow Z[J] = \langle 0|\underbrace{T(e^{iJ\varphi})}_{I[J]}|0\rangle \quad \mathrm{II}$$

مشتق میگیریم

$$\frac{1}{i}\frac{\delta I[J]}{\delta J(x)} = T(\varphi(x) I[J])$$

$$\varphi(x) = \varphi_{in} + \int d^4y\, D_{ret}(x-y) K_y \varphi(y) \xrightarrow{\text{ضرب در } I \text{ و اثر } T} \frac{1}{i}\frac{\delta I[J]}{\delta J(x)} = I[J]\varphi_{in} + \int dy D_{ret} K_y \frac{1}{i}\frac{\delta I}{\delta J(y)}$$

$$\varphi(x) = \varphi_{out} + \int d^4y\, D_{adv}(x-y) K_y\varphi(y) \qquad \frac{1}{i}\frac{\delta I[J]}{\delta J(x)} = \varphi_{out} I[J] + \int dy D_{adv} K_y \frac{1}{i}\frac{\delta I}{\delta J(y)}$$

دو رابطه را از هم کم میکنیم:

$$0 = I\varphi_{in} - \varphi_{out} I - i\int dy\,(\underbrace{D_{ret} - D_{adv}}_{-D(x-y)})K_y\frac{\delta I}{\delta J}$$

*' از: $-D(x-y)$

$$\Rightarrow \varphi_{out} I - I\varphi_{in} = i\int dy\, D(x-y)K_y\frac{\delta I[J]}{\delta J(y)} \quad \mathrm{II}$$

$$\varphi_{out} I - I\varphi_{in} = S^{+}\varphi_{in} S I - S^{+}S I\varphi_{in} = S^{+}[\varphi_{in}, SI]$$

$$\Rightarrow \mathrm{II}: [\varphi_{in}(x), SI[J]] = i\int dy\, D(x-y) K_y \frac{\delta}{\delta J(y)}(SI[J]) \quad (3)$$

قبلاً در مورد نظریه آزاد بدست آورده بودیم:

$$[\varphi(x), \varphi^{+}(y)] = iD(x-y) \longrightarrow \text{اگر } \varphi \text{ حقیقی باشد}: \ [\varphi(x), \varphi(y)] = iD(x-y)$$

این روابط برای φ_{in} و φ_{out} که مشخص کننده میدان ذرات آزاد ورودی و خروجی هستند نیز برقرار است. پس:

$$[\varphi_{in}(x), \varphi_{in}(y)] = iD(x-y)$$

$$\Rightarrow [\varphi_{in}(x), SI] = \int dy\, [\varphi_{in}(x), \varphi_{in}(y)] K_y \frac{\delta}{\delta J(y)}(SI[J]) \quad (1)$$

تذکر: $e^{B}Ae^{-B} = A + [B,A] + [B,[B,A]] + \cdots$

if $[A,B] =$ C-number $\Rightarrow e^{B}Ae^{-B}e^{B} = Ae^{B} + [B,A]e^{B} \Rightarrow e^{B}A = (A - [A,B])e^{B}$

$$\Rightarrow Ae^{B} - e^{B}A = [A,B]e^{B} \Rightarrow [A, e^{B}] = [A,B]e^{B} \quad (2)$$

از مقایسه رابطه (1) و (2) میتوان این رابطه را برای SI پیشنهاد داد:

$$SI[J] = \exp\left[\int \varphi_{in}(y) K \frac{\delta}{\delta J(y)} dy\right] \underbrace{F[J]}_{\text{تابعی از } J} \quad (4)$$

با فرض این جواب، برای SI، داریم:

$$(3) \rightarrow [\varphi_{in}, SI] = i\int dy\, D(x-y) K_y \frac{\delta}{\delta J(y)} \exp\left[\int \varphi_{in}(z) K\frac{\delta}{\delta J(z)} dz\right] F[J]$$

$$= \exp\left[\int \varphi_{in}(z) K \frac{\delta}{\delta J(z)} dz\right] i\int dy\, D(x-y) K \frac{\delta F[J]}{\delta J(y)}$$

که یعنی :

$$\frac{\delta(SI)}{\delta J(y)} = \exp\left[\int \varphi_{in}(z)\, k \frac{\delta}{\delta J(z)}\, dz\right] \frac{\delta F[J]}{\delta J(y)}$$

که نشان می‌دهد شبیه‌سازی ما برای SI درست بوده است. اکنون به دنبال یافتن $F[J]$ هستیم.

$$e^A = 1 + A + A^2/2! + \cdots \Longrightarrow \langle 0|:e^A:|0\rangle = 0 \quad \text{و} \quad \langle 0|:A:|0\rangle = \langle 0|:A^2:|0\rangle = \cdots = 0$$

$$\Longrightarrow (4):\ \langle 0|SI[J]|0\rangle = \underbrace{\langle 0|:e^{\int\cdots}:|0\rangle}_{1} F[J] = F[J] \quad (5)$$

$$Z[J=0] = \underbrace{\langle 0,-\infty|0,+\infty\rangle}_{} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \overbrace{\langle 0|S}^{\langle 0|}|0\rangle = 1 \longrightarrow \langle 0|S = \langle 0|$$

داشتیم : $\langle 0|S(t_i=-\infty, t_f=+\infty)|0\rangle$

توجه کنید که این مطلب در مورد S بدیهی بود اما در مورد I که شامل برهم‌کنش است بدیهی نمی‌باشد.

$$(5):\ \underbrace{\langle 0|S}_{\langle 0|}I|0\rangle = F[J] \longrightarrow F[J] = \langle 0|I[J]|0\rangle = Z[J]$$

از رابطه II

$$\Longrightarrow SI = :\exp\left[\int \varphi_{in}(z)\, k_z \frac{\delta}{\delta J(z)}\, dz\right]: Z[J]$$

داریم : $I[J]\big|_{J=0} = 1 \Longrightarrow$

$$\boxed{S = :\exp[\cdots]: Z[J]\big|_{J=0}}$$

reduction formula

$$\Longrightarrow S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \overbrace{:\left(\int dz\, \varphi_{in}(z) k_z \frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^n: Z[J]\Big|_{J=0}}^{i^n S_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n S_n$$

$$\longrightarrow S_n = \left[:\prod_{i=1}^{n} \int dx_i\, \varphi(x_i)\left(\Box_{x_i} + m^2\right):\right] \underbrace{\frac{1}{i^n} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} Z[J]}_{G(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\Big|_{J=0}$$

$$S_n(x_1, \ldots, x_n) \equiv \prod_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\left(\Box_{x_i} + m^2\right) G(x_1, \ldots, x_n)$$: n-particle S-matrix element

$$\Longrightarrow S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \ldots dx_n\, S_n(x_1, \ldots, x_n)$$

ما این رابطه را برای ذرات اسکالر بدست آوردیم که $k_x = \Box_x + m^2$ که عملگر معادله K.G است. اگر بخواهیم ماتریس پراکندگی را برای فرمیون‌ها بدست آوریم، این اپراتور را $D_x = i\gamma\cdot\partial - m$ جایگزین می‌شود.

* تمرین: محاسبات را به صورت مفصل برای فرمیون‌ها انجام دهید.

پراکندگی پایون از نوکلئون

$\pi^{\mp}$ و π^0 بوزونهای اسپین صفر هستند که پاریته را نقض می‌کنند ← φ' یک شبه بردار است.

$$\varphi' = (\pi^+, \pi^0, \pi^-)$$

پس پایون یک ذره شبه اسکالر است پس برهم‌کنش آن با سیستم هسته به شکل زیر است :

ماتریس‌های پائولی

$$\mathcal{L}_{int} = ig\bar{\psi}\gamma_5 \underbrace{\vec{\tau}\psi}_{}\cdot\vec{\varphi}$$

$\rightsquigarrow \bar{\psi}\gamma_5\psi$: pseudoscalar

بردار در فضای ایزواسپین نوکلئون‌ها

در فضای ایزواسپین نوکلئون‌ها، ψ و $\bar{\psi}$ اسکالر هستند.

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$$

〃 〃 فرمیون‌ها، φ یک اسکالر است.

مربوط به فضای ایزواسپین نوکلئون‌ها ← $V_i = \bar{\psi}\gamma_5 \tau_i \psi$

	φ	$\bar\psi\gamma_5\vec\tau\psi$	$\psi,\bar\psi$	$\mathcal{L}$
فضای ایزواسپین نوترونها	بردار	بردار	اسکالر	اسکالر
فرمیونها " "	اسکالر	اسکالر	doublet $\begin{pmatrix}p\\n\end{pmatrix}$	اسکالر
تحت پاریته	شبه اسکالر	شبه اسکالر		

شرط این است که لاگرانژی در همه فضاها اسکالر باشد چون در کنش وارد می‌شود.

$$\mathcal{L}_{int}=ig(\bar p,\bar n)\begin{pmatrix}\gamma_5&0\\0&\gamma_5\end{pmatrix}\tau_j\begin{pmatrix}p\\n\end{pmatrix}\varphi_j=ig\Big\{(\bar p,\bar n)\begin{pmatrix}\gamma_5&0\\0&\gamma_5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\n\end{pmatrix}\varphi_1$$

$$+(\bar p,\bar n)\begin{pmatrix}\gamma_5&0\\0&\gamma_5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\n\end{pmatrix}\varphi_2$$

$$+(\bar p,\bar n)\begin{pmatrix}\gamma_5&0\\0&\gamma_5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\n\end{pmatrix}\varphi_3\Big\}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}_{int}=ig\Big\{\bar p\gamma_5 n(\varphi_1-i\varphi_2)+\bar n\gamma_5 p(\varphi_1+i\varphi_2)+(\bar p\gamma_5 p-\bar n\gamma_5 n)\varphi_3\Big\}$$

n و $\bar n$ دارای عدد باریونی متفاوت هستند.

در جمله آخر چون p و $\bar p$ و نیز n و $\bar n$ با هم ظاهر شده‌اند پس یعنی بار نداریم و $\varphi_3\to\varphi^0$

در جمله اول، از $\bar p$ به n و $(\varphi_1-i\varphi_2)$ رسیده‌ایم پس ذره $(\varphi_1-i\varphi_2)$ باید دارای بار + باشد.

" دوم، از $\bar n$ به p و $(\varphi_1+i\varphi_2)$ " " $(\varphi_1+i\varphi_2)$ " " " − باشد.

پس یعنی میدانهای مختلط باردار داریم.

$$\varphi^\pm=\frac{1}{\sqrt2}(\varphi_1\pm i\varphi_2)\quad,\quad \varphi^0=\varphi_3$$

برهم‌کنش π^0 با p یا n

$$\Longrightarrow \mathcal{L}_{int}=i\sqrt2 g(\bar p\gamma_5 n\varphi_+ + \bar n\gamma_5 p\varphi_-)+\underbrace{ig(\bar p\gamma_5 p-\bar n\gamma_5 n)\varphi_0}$$

φ_+ : فنای π^+ و خلق π^-

φ_- : " π^- و " π^+

p : فنای پروتون و خلق پادپروتون

$\bar p$: خلق " و فنای " "

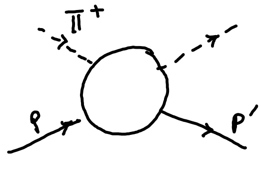
و همین طور در مورد n

پس لاگرانژی کلی برای این برهم‌کنش به این شکل است:

$$\mathcal{L}=\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi+M\bar\psi\psi+\tfrac12\partial^\mu\vec\varphi\,\partial_\mu\vec\varphi-\tfrac12 m^2\varphi^2+i\sqrt2 g(\bar p\gamma_5 n\varphi_+ +\bar n\gamma_5 p\varphi_-)$$

جرم میدان فرمیونی هسته ‌ ‌ ‌ جرم میدان اسکالر بوزون

که اگر بخواهیم به صورت جدا جدا بنویسیم به این شکل است:



$$\mathcal{L}_{\text{فرمیون}}=\bar\psi_p(i\gamma^\mu\partial_\mu-M)\psi_p+\bar\psi_n(i\gamma^\mu\partial_\mu-M)\psi_n=\bar\psi(i\gamma^\mu\partial_\mu-M)\psi$$

$$\mathcal{L}_{\text{بوزونی}}=\sum_i\tfrac12(\partial_\mu\varphi_i\partial^\mu\varphi_i-m^2\varphi_i\varphi_i)=\partial_\mu\varphi_+\partial^\mu\varphi_- -m^2\varphi_+\varphi_-$$

این جمع را انجام دهید

برای تابع‌های مولد داریم:

$$Z[J]=N\int\mathcal{D}\varphi\, e^{i\int \mathcal{L}_0+\mathcal{L}_{int}+J\varphi}=e^{i\int\mathcal{L}_{int}\left(\frac1i\,\delta/\delta J\right)dx}\,Z_0[J]$$

$$Z_0[J]=\frac1N\int\mathcal{D}\varphi\,\exp\Big\{i\int\big[\tfrac12\varphi(\Box+m^2)\varphi-\varphi J\big]dx\Big\}$$

$$Z[\eta,\bar\eta]=N\int \mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar\psi\; e^{i\int \mathcal{L}_0+\mathcal{L}_{int}+\bar\eta\psi+\bar\psi\eta}=e^{i\int \mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J},\,\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta}\right)}Z_0[\eta,\bar\eta]$$

$$Z_0[\eta,\bar\eta]=\frac{1}{N}\int \mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar\psi\,\exp\left\{i\int\left[\bar\psi\,\underbrace{(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)}_{S^{-1}}\psi+\bar\eta\psi+\bar\psi\eta\right]dx\right\}$$

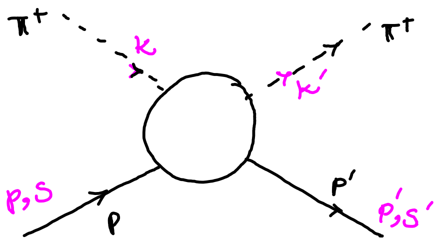
به این ترتیب داریم :

$$Z[J_+,J_-,\eta_p,\bar\eta_p,\eta_n,\bar\eta_n]=N\exp\left\{i\int i\sqrt{2}g\,dz\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta_p(z)}\gamma_5\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar\eta_n(z)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_+(z)}+\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta_n(z)}\gamma_5\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar\eta_p(z)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_-}\right)\right\}Z_0[J,\eta,\bar\eta]$$

$$Z_0=\frac{1}{[\ldots]\big|_{J=\eta=\bar\eta=0}}\int \mathcal{D}\varphi_+\mathcal{D}\varphi_-\mathcal{D}\psi_p\mathcal{D}\bar\psi_p\mathcal{D}\psi_n\mathcal{D}\bar\psi_n\exp\left[i\int(\bar\psi_pS^{-1}\psi_p+\bar\psi_nS^{-1}\psi_n\right.$$
$$\left.+\bar\eta\psi+\bar\psi\eta+J\varphi-\tfrac12\varphi_1K\varphi_1-\tfrac12\varphi_2K\varphi_2)\,d^4x\right]$$

جواب Z_0 را از قبل می‌دانیم :

$$Z_0[J,\eta,\bar\eta]=\exp\left\{-i\int\left[\tfrac12 J(x)\Delta_F(x-y)J(y)+\bar\eta(x)S(x-y)\eta(y)\right]dx\,dy\right\}$$



حال می‌خواهیم دامنه پراکندگی برای این برهم‌کنش را بدست آوریم .

$$S_{fi}=\langle f|S|i\rangle=\langle f,t=\infty|\,i,t=+\infty\rangle$$

ارزش ست با جاهای قبل : $S=:e^{\int \varphi_{in}K\frac{\delta}{\delta J}+\bar\psi_{in}\overrightarrow{D}\frac{\delta}{\delta\bar\eta}-\frac{\delta}{\delta\eta}\overleftarrow{D}\psi_{in}}:Z\big|_0$

حالت ابتدائی : $|i\rangle=|\underbrace{p,s}_{\text{مربوط به پروتون}};\underbrace{k}_{\text{مربوط به پایون}}\rangle=a^+(k)\,b_s^+(p)|0\rangle$

حالت نهائی : $|f\rangle=|p',s';k'\rangle=a^+(k')\,b^+_{s'}(p')|0\rangle$

حال باید exp را بسط دهیم و قسمت‌های مشتقات (source ها را ننوشته‌ام)

$$\text{بسط تابع نمائی}=(1+\varphi+\tfrac12\varphi^2+\cdots)(1+\varphi^++\tfrac12\varphi^{+2}+\cdots)(1+\bar\psi+\tfrac12\bar\psi^2+\cdots)(1-\psi+\tfrac12\psi^2+\cdots)$$

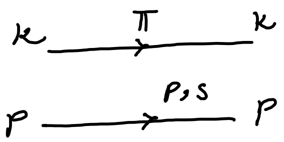
نشان می‌دهیم که اثر این جملات صفر می‌شوند :

$$\text{جمله واحد بسط}=\langle f|i\rangle Z=\langle 0|a(k')b_{s'}(p')a^+(k)b_s^+(p)|0\rangle$$

$$=\langle 0|\underbrace{b_{s'}(p')b_s^+(p)}_{B_p\delta(p-p')\delta_{ss'}-\cancel{b_s^+(p)b_{s'}(p')}}\;\underbrace{a(k')a^+(k)}_{\cancel{a^+(k)a(k)}+A_k\delta(k-k')}|0\rangle$$

$$[a(k),a^+(k')]=A_k\delta(k-k')$$
$$[b_s(p),b_s^+(p')]=B_p\delta(p-p')\delta_{ss'}$$
$$A_k=2\omega_k(2\pi)^3,\quad B_p=(2\pi)^3\frac{p}{m}$$

$$\Longrightarrow\ \text{جمله واحد بسط}=B_pA_k\,\delta(k-k')\,\delta_{ss'}\,\delta(p-p')$$



تقریب صفرم هیچ اندرکنشی را نمی‌دهد.

$$\text{جمله خطی نسبت به }\varphi=\langle f|\varphi|i\rangle=\langle 0|b_{s'}(p')a(k')\,\varphi\,a^+(k)\,b_s^+(p)|0\rangle$$

داشتیم: $\varphi(x) = \int \frac{d^3q}{2(2\pi)^3\omega_q}\left[a(q)\,e^{-iq\cdot x} + b'^{+}(q)\,e^{iqx}\right]$

$$\rightarrow \langle f|\varphi|i\rangle = \int \frac{d^3q}{2(2\pi)^3\omega_q}\langle 0|\,b_{s'}(p')\,a(k')\left(a(q)e^{-iqx} + b'^{+}(q)e^{iqx}\right)a^{+}(k)\,b_s^{+}(p)|0\rangle$$

$$= \underbrace{\langle 0|b_{s'}(p')\,b_s^{+}(p)|0\rangle}_{B_p\,\delta_{ss'}\,\delta(p-p')}\Big[\langle 0|a(k')\underbrace{a(q)\,a^{+}(k)}_{a^{+}(k)a(q)+\delta(k-q)}|0\rangle + \langle 0|a(k')\,\underbrace{b'^{+}(q)}_{=0}\,a^{+}(k)|0\rangle\Big]$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که جملات حذف دیگر نیز صفر می‌شوند و تنها جملاتی که باقی می‌مانند، جملاتی هستند که اندرکنش φ و ψ را به ما می‌دهند مثل جمله $\varphi\varphi^{+}\bar{\psi}\psi$ (اگر در جمع کنش φ° آزاد در نظر بگیریم، جمله $\bar{\psi}\psi\varphi^{2}$ باقی می‌ماند)

$$\underbrace{a(q)\,b'(q')}_{} + a^{+}(q')\,a(q) + b'^{+}(q)\,b'(q) + b'^{+}(q)\,a^{+}(q')$$

سهم جمله بوزونی $= \langle 0|a(k') : \varphi(x_1)\,\varphi^{+}(x_2) : a^{+}(k)|0\rangle$

$$\text{تنها جمله غیر صفر} = \int dx_1\,dx_2\,\frac{d^3q}{2(2\pi)^3\omega_q}\,\frac{d^3q'}{2(2\pi)^3\omega_{q'}}\,\langle 0|\,a(k')\,e^{iq'x_2}\,a^{+}(q')\,e^{-iqx_1}\,\underbrace{a(q)\,a^{+}(k)}_{a^{+}(k)a(q)+A_k\,\delta(\vec{k}-\vec{q})}|0\rangle$$

$$a(k')\,a^{+}(q') = a^{+}(q')\,a(k) + A_{k'}\,\delta(\vec{k}'-\vec{q}')$$

$$\times K_{x_1}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\,K_{x_2}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\,Z\Big|_0$$

$$= \int dx_1\,dx_2\,e^{ik'x_2 - ikx_1}\,K_{x_1}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\,K_{x_2}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\,Z\Big|_0$$

$$\underbrace{b^{+}b + b^{+}d^{+}}_{} + db - d^{+}d$$

سهم جمله فرمیونی $= \langle 0|\,b_{s'}(p') : \bar{\psi}(x_4)\,\psi(x_3) : b_s^{+}(p)|0\rangle$

داشتیم: $\bar{\psi}(x_4) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{m}{k_0}\sum_s\left[b_s^{+}\,\bar{u}_s(k)\,e^{ikx_4} + d_s(k)\,\bar{v}_s(k)\,e^{-ikx_4}\right]$

$$\psi(x_3) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{m}{k_0}\sum_s\left[b_s\,u_s(k)\,e^{-ikx_3} + d_s^{+}(k)\,v_s(k)\,e^{ikx_3}\right]$$

تنها جمله غیر صفر = $\langle 0|\,\underbrace{b_{s'}(p')\,b_{s''}^{+}(q)}_{b_{s''}^{+}(q)\,b_{s'}(p') + B_q\,\delta(\vec{q}-\vec{p}')}\;\underbrace{b_{s''}(q')\,b_{s'}^{+}(p)}_{}|0\rangle \rightarrow -b_s^{+}(p)\,b_{s''}(q') + B_p\,\delta_{ss''}\,\delta(\vec{p}-\vec{q}')$

که خلاصه نوشته شده است

پس به این ترتیب، داریم:

$$S_{fi} = \int dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4\,e^{i(k'x_2 + p'\cdot x_4 - p\cdot x_3 - k\cdot x_1)} \times \bar{u}_{s'}(p')\,K_{x_2}\,D_{x_4}\,\underbrace{\tau(x_1,\dots,x_4)}_{\text{تابع ۴ نقطه یا تابع گرین}}\,\overleftarrow{K}_{x_1}\,\overleftarrow{D}_{x_3}\,u_s(p)$$

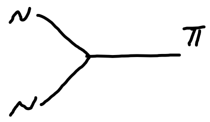
$$\tau(x_1,\dots x_4) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\,\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\,\frac{\delta}{\delta \eta(x_3)}\,\frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x_4)}\,Z[J,\eta,\bar{\eta}]\Big|_0$$

حال دامنه پراکندگی از ضرب تابع گرین در اپراتورهای دیراک یا کلین-گوردون بدست می‌آید (هر کدام که برای ذرات خروجی باشند)

سپس در تابع موج ذرات در مکان‌های $x_1, \dots x_4$ ضرب کرده و روی x_1 تا x_4 انتگرال می‌گیریم.

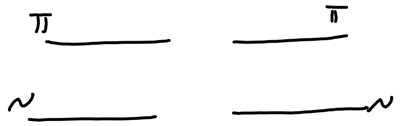
نمودارهای فاینمن

$$\mathcal{L}_{int} = i\sqrt{2}g\,\bar{\psi}\gamma_5\psi\,\varphi$$

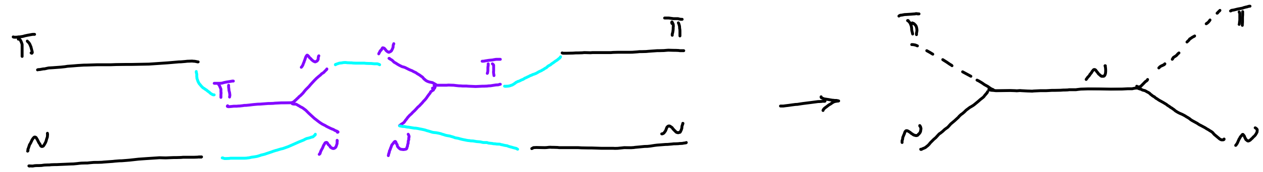


چون سه میدان داریم پس رأس سه تایی داریم که یکی از آنها مزون (φ) و دو تای دیگر ($\bar{\psi}$, ψ) فرمیون هستند

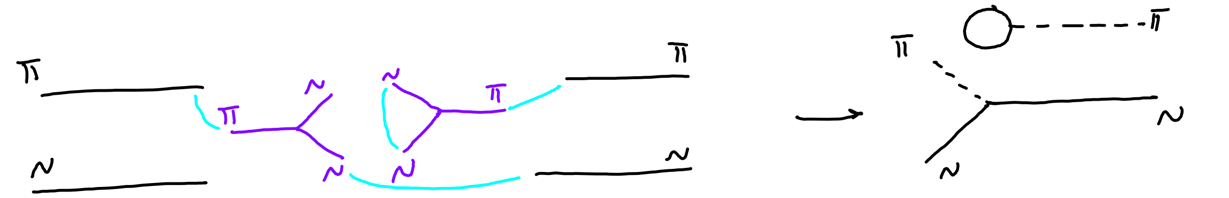
۴ تا پای آزاد هم داریم:



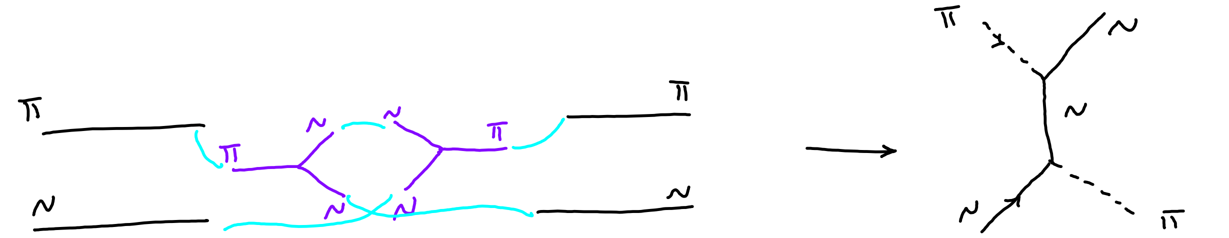
توجه کنید که در مرتبه اول دیاگرام‌ها، حتماً باید دو رأس برهمکنش داشته باشیم. چون با داشتن یک رأس نمی‌توان ۴ خط خارجی را به ۳ تا خط برهمکنش وصل کرد.



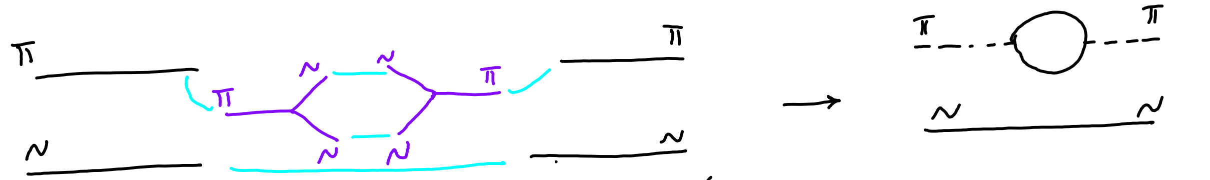
(a)



(b)



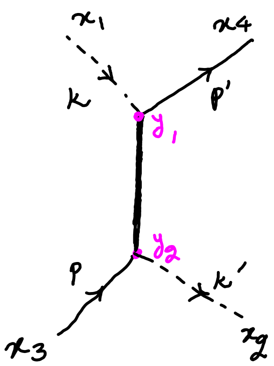
(c)



(d)

در مرتبه اول نمودار (a) و (c) را داریم. همچنین به بقای بار در ورتکس‌ها باید توجه کرد.

به عنوان مثال این نمودار را در نظر بگیرید:



$$\tau(x_1, \dots, x_4) = \int dy_1\, dy_2\; i D_F(x_2 - y_2)\; iS(x_4 - y_1)\, i\sqrt{2}g\gamma_5\; iS(y_1 - y_2)\, i\sqrt{2}g\gamma_5$$
$$iS(y_2 - x_3)\; i D_F(x_1 - y_1)$$

ما برای فرمیون‌ها انتشارگر iS را نوشته‌ایم و برای بوزون‌ها iD_F را و ضریب رأس را هم $i\sqrt{2}g$ در نظر گرفته‌ایم که چون رأس‌های شبه‌اسکالر داریم یک جمله γ_5 را هم باید اضافه کنیم.

حال با داشتن تابع چهار نقطه‌ای، به رابطه * برمی‌گردیم. این روابط را داریم:

$$D = i\gamma^\mu \partial_\mu - M \longrightarrow D_x S(x-y) = (i\gamma\cdot\partial_x - M)\,S(x-y) = \delta^4(x-y)$$

$$S(x-y)\overleftarrow{D}_x = S(x-y)(-i\gamma\cdot\overleftarrow{\partial}_x - M) = \delta^4(x-y)$$

$$K = \Box + m^2 \longrightarrow K_x D_F(x-y) = (\Box_x + m^2)\,D_F(x-y) = -\delta^4(x-y)$$

این توابع δ امکان گرفتن انتگرال ها را به ما می دهد :

$$S_{fi} = \int dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4\, dy_1 dy_2\, e^{i(k'\cdot x_2 + p'\cdot x_4 - p\cdot x_3 - k\cdot x_1)} \times \bar{u}_{s'}(p')\, K_{x_2} D_{x_4} \times$$

$$2g^2\, i\Delta_F(x_2-y_2)\, iS(x_4-y_1)\, i\gamma_5\, iS(y_1-y_2)\, i\gamma_5\, iS(y_2-x_3)\, i\Delta_F(x_1-y_1)\, \overleftarrow{D}_{x_3}\, \overleftarrow{K}_{x_1}\, u_s(p)$$

$$= -2ig^2 \int dx_1 \cdots dx_4\, dy_1 dy_2\, e^{i(k'x_2 + p'x_4 - px_3 - kx_1)}\, \bar{u}_{s'}(p')\, \delta^4(x_2-y_2)\, \delta^4(x_4-y_1)$$

$$\gamma_5\, S(y_1-y_2)\, \gamma_5\, \delta^4(y_2-x_3)\, \delta^4(y_1-x_1)\, u^s(p)$$

$$\Rightarrow S_{fi} = -2ig^2 \int dy_1 dy_2\, e^{i(p'-k)y_1} e^{i(k'-p)y_2}\, \bar{u}_{s'}(p')\, \gamma_5\, S(y_1-y_2)\, \gamma_5\, u_s(p)$$

داشتیم : $(i\gamma^\mu \partial_\mu + M)\, \Delta_F = S(x)$

رابطه 6.135

$$\left.\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q\, \frac{e^{-iqx}}{q^2-M^2}\right\} \Rightarrow S(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q\, \frac{\gamma\cdot q + M}{q^2-M^2}\, e^{-iq(x-y)}$$

حال این رابطه را در رابطه S_{fi} جایگذاری می کنیم :

$$S_{fi} = -2ig^2 \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q\, \bar{u}_{s'}(p')\, \gamma_5\, \frac{\gamma\cdot q + M}{q^2-M^2}\, \gamma_5\, u_s(p) \underbrace{\int dy_1\, e^{i(p'-k-q)y_1}}_{(2\pi)^4 \delta^4(p'-k-q)}$$

$$\times \underbrace{\int dy_2\, e^{i(k'-p+q)y_2}}_{(2\pi)^4 \delta^4(k'-p+q)}$$

اصل بقای انرژی : $\delta(P_f - P_i)$

$$S_{fi} = -2ig^2 (2\pi)^4\, \bar{u}_{s'}(p')\, \underbrace{\gamma_5\, \frac{\gamma\cdot(p-k') + M}{(p-k')^2 + M^2}\, \gamma_5\, u_s(p)}_{\text{این ترم را ساده می کنیم}}\; \overbrace{\delta(p'-k-p+k')}^{\delta(P_f - P_i)} \qquad p-k' = p'-k$$

داشتیم : $(\gamma^5)^2 = 1$, $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$

$$\gamma_5 \{\gamma\cdot(p-k') + M\}\, \gamma_5\, u_s(p) = \gamma_5 \{\gamma\cdot p - \gamma\cdot k' + M\}\, \gamma_5\, u_s(p) = \overbrace{\gamma_5^2}^{1}\, (-\gamma\cdot p + \gamma\cdot k' + M)\, u_s(p)$$

$$= \overbrace{-(\gamma^\mu p_\mu - M)\, u_s(p)}^{0} + \gamma\cdot k'\, u_s(p) = \gamma\cdot k'\, u_s(p)$$

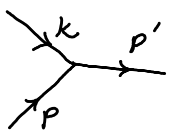
چون در معادله دیراک صدق می کند

مخرج رابطه $= \overbrace{\cancel{p^2}}^{M^2} + \underbrace{k'^2}_{m^2} - 2p\cdot k' - \cancel{M^2} = m^2 - 2p\cdot k' \longrightarrow$ رابطه 6.174 ✓

قوانین فاینمن

خط های ورودی فرمیونی $\quad \xrightarrow{s,p} \quad u_s(p)$

" خروجی " $\quad \xrightarrow{s,p} \quad \bar{u}_s(p)$

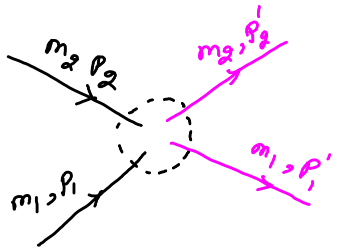
vertex  $\quad i\sqrt{2}\, g\, \gamma_5\, (2\pi)^4 \delta(k+p-p')$

انتشارگر فرمیونی (خط داخلی) $\xrightarrow{\;p\;}$ $\frac{i}{(2\pi)^4}\frac{1}{\gamma\cdot q-M}\left(\int d^4p\right)$

〃 بوزونی 〃 $\overset{q}{\cdots\cdots}$ $\frac{i}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2-M^2}\int d^4q$

محاسبه Cross-section

Lorentz invariant amplitude : $\langle f|S-1|i\rangle \equiv i(2\pi)^4\,\delta^4(P_f-P_i)\,M_{fi}$



در واقع سهم واحد در ماتریس S را در نظر گرفته ایم که S_{fi} مربوط را می دهد.

حالت های ورودی را یک بسته موج در نظر می گیریم که f و g را تابع موج ذرات اول و دوم در فضای تکانه هستند:

$$|i\rangle = \int d^3\tilde{k}_1\, d^3\tilde{k}_2\, f(k_1)\, g(k_2)\, |k_1, k_2\rangle \quad ; \quad d^3\tilde{k} = \frac{d^3k}{2k_0(2\pi)^3}$$

$$\text{دامنه گذار} = \langle f|S-1|i\rangle = \langle p_1', p_2'|S-1|i\rangle = \int d^3\tilde{k}_1\, d^3\tilde{k}_2\, f(k_1)\, g(k_2)\, \underbrace{\langle p_1' p_2'|S-1|k_1 k_2\rangle}_{i(2\pi)^4\delta(P_f-P_i)M_{fi}}$$

$$W_v \;\; \text{احتمال گذار} = (\text{دامنه گذار})^2 = (2\pi)^8 \int d\tilde{k}_1\, d\tilde{k}_2\, d\tilde{q}_1\, d\tilde{q}_2\, f(k_1)\, g(k_2)\, f^*(q_1)\, g^*(q_2)\, \times$$

$$\underbrace{\delta(P_f-k_1-k_2)\,\delta(P_f-q_1-q_2)}_{\delta(P_f-P_i)\,\underbrace{\delta(q_1+q_2-k_1-k_2)}_{\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i(k_1+k_2-q_1-q_2)\cdot x}d^4x}}\; \underbrace{M(p_1', p_2', k_1, k_2)\, M^*(p_1', p_2', q_1, q_2)}_{\simeq |M(p_1', p_2', p_1, p_2)|^2}$$

$$W = \delta(P_f-P_i)(2\pi)^4 \int d^4x \int d\tilde{k}_1\, d\tilde{q}_1\, f(k_1)\, f^*(q_1)\, e^{i(k_1-q_1)\cdot x} \int d\tilde{k}_2\, d\tilde{q}_2\, g(k_2)\, g^*(q_2)\, e^{i(k_2-q_2)x}$$

تبدیل فوریه f : $\tilde{f}(x) = \int f(q)\, e^{iqx}\, dq$

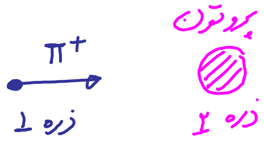
$$\Rightarrow W = (2\pi)^4\,\delta(P_i-P_f)\int d^4x\, |\tilde{f}(x)|^2\, |\tilde{g}(x)|^2\, |M|^2$$

$$\text{احتمال گذار در واحد زمان در واحد حجم} = \frac{dW}{dV\,dt} = |\tilde{f}(x)|^2\, |\tilde{g}(x)|^2\, |M|^2\, (2\pi)^4\,\delta(P_f-P_i)$$

ما تابع موج های بوزونی را به شکل $\underbrace{e^{-ip\cdot x}}_{\phi(x)}$ و تابع موج های فرمیونی را به صورت $\underbrace{u(p)\,e^{-ip\cdot x}}_{\psi(x)}$ در نظر گرفته بودیم.

چگالی ذرات بوزونی در واحد حجم : $\rho = i\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right) = 2P_0$

〃 فرمیونی 〃 〃 : $\rho = \psi^+\psi = u^+(p)\, u(p) = P_0/M$ (از رابطه 2.B9



(چارچوب سکون ذره هدف)

در آزمایشگاه ، ذره هدف ساکن در نظر گرفته می‌شود: $P_0 = M$ و $E_2 = Mc^2$

چگالی ذره هدف (ذره ۲) $= 1 \times |g(x)|^2$

$\frac{1}{\text{شار ذره فرورودی}} = \rho\, \vec{v}$ $\rightsquigarrow$ $\vec{v}$: سرعت نسبی ذره فرودی نسبت به ذره هدف است که چون $= \frac{|\vec{P}_1|}{P_1^0}$ $\frac{\rightsquigarrow \gamma m \vec{v}}{\rightsquigarrow \gamma m c^2}$ $c=1$

$\downarrow$

شار ذره فرودی $= (2P_1^0)\frac{|\vec{P}_1|}{P_1^0} = 2|\vec{P}_1| \implies$ شار ذرات فرودی (ذره ۱) $= 2|\vec{P}_1|\,|f(x)|^2$

سطح مقطع پراکندگی : $d\sigma = \dfrac{\frac{dw}{dt\,dV}}{\text{initial flux} \times \text{target density}} = (2\pi)^4 \dfrac{|M_{fi}|^2 \delta(P_i - P_f)}{2|\vec{P}_1|}$

تا اینجا فرض کردیم بود که ذرات خروجی، ممنتوم معین داشته باشند. آنچه در آزمایشگاه اندازه‌گیری می‌شود، سطح مقطع دیفرانسیلی است که پراکندگی در یک زاویه خاص $d\Omega$ را معین می‌کند. پس ممنتوم نهایی در یک بازه مثلاً $d\vec{p}_1$ قرار می‌گیرد. پس باید (المان حجم فضای فاز) را وارد کنیم:

المان حجم فضای فاز بوزون‌ها $= \dfrac{d^3p_1'}{2(2\pi)^3 E_1'}$

" " " فرمیون‌ها $= \dfrac{d^3p_2'}{(2\pi)^3}\dfrac{M}{E_2'}$

همچنین این نکته نیز باید توجه کرد که اگر ذرات فرودی غیر پلاریزه باشند باید روی اسپین‌های فرودی، متوسط بگیریم و چون حالت نهایی اسپین‌های خروجی هم مشخص نیست، روی آن‌ها هم باید جمع بزنیم.

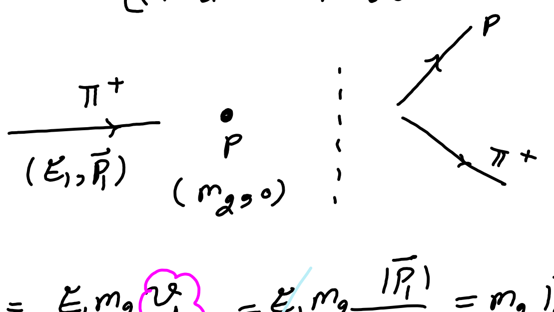
$$d\sigma = \frac{1}{16\pi^2}\frac{d^3p_1'}{E_1'}\frac{d^3p_2'}{E_2'}\frac{M^2}{|\vec{P}_1| M}\,\delta(P_f - P_i)\underbrace{\frac{1}{(2S_1+1)(2S_2+1)}}\sum_{S_i, S_f}|M_{fi}|^2$$

کمیت ناوردای لورنتسی

در مثال ما : $S_1 = 0$ و $S_2 = \frac{1}{2}$

نشان می‌دهیم که در هر دستگاه ، این رابطه $[(P_1 \cdot P_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{\frac{1}{2}} = E_1 E_2 v_{rel}$ برقرار است. یعنی $d\sigma$ نیز در هر دستگاهی برقرار است.

lab. frame

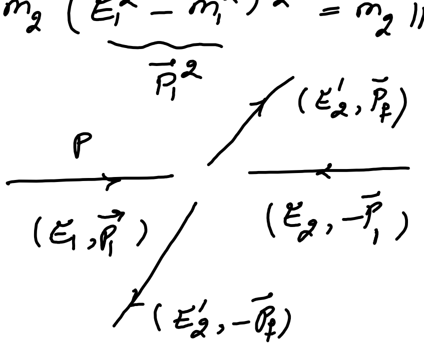


$$R.H.S = E_1 E_2 v_{rel} = E_1 m_2 v_1 = \cancel{E_1} m_2 \frac{|\vec{P}_1|}{\cancel{E_1}} = m_2 |\vec{P}_1|$$

همان سرعت نسبی است

$$L.H.S = [m_2^2 E_1^2 - m_1^2 m_2^2]^{\frac{1}{2}} = m_2 (\underbrace{E_1^2 - m_1^2}_{\vec{P}_1^2})^{\frac{1}{2}} = m_2 |\vec{P}_1| \checkmark$$

C.M. frame



$$\left[(P_1\cdot P_2)^2 - m_1^2 m_2^2\right]^{1/2} = \left[(E_1E_2 + |\vec P_1|^2)^2 - \underbrace{m_1^2}_{E_1^2-|\vec P_1|^2}\ \underbrace{m_2^2}_{E_2^2-|\vec P_1|^2}\right]^{1/2} =$$

$$= \Big\{\cancel{E_1^2E_2^2} + 2E_1E_2|\vec P_1|^2 + \cancel{|\vec P_1|^4} - \underbrace{(E_2^2 - |\vec P_1|^2)(E_1^2 - |\vec P_1|^2)}_{\cancel{E_1^2E_2^2} - (E_1^2+E_2^2)|\vec P_1|^2 + \cancel{|\vec P_1|^4}}\Big\}^{1/2} = (E_1+E_2)|\vec P_1|$$

$$R.H.S = E_1E_2(v_1+v_2) = E_1E_2\left(\frac{|\vec P_1|}{E_1} + \frac{|\vec P_2|}{E_2}\right) = E_1E_2|\vec P_1|\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right) = (E_1+E_2)|\vec P_1| \checkmark$$

در رابطه $d\sigma$ دقت کرده، اطلاعات زیادی وجود دارد چون p ها از هم مستقل نیستند. پس روی متغیرهای غیرمستقل جمع می‌زنیم تا فقط مستقل‌ها باقی بمانند. اکنون در دستگاه CM رابطه $d\sigma$ را می‌نویسیم که $\vec P_f = \vec P_1' = -\vec P_2'$

$$d\sigma \propto \int \frac{d^3P_1'}{E_1'}\frac{d^3P_2'}{E_2'}\delta(E_1'+E_2'-E_i)\,\delta^3(P_1'+P_2'-P_i) = \int \frac{\overbrace{d^3P_f}^{P_f^2\,dP_f\,d\Omega_f}}{E_1'E_2'}\delta(E_1'+E_2'-E_i)$$

داریم: $\displaystyle\int h(x)\,\delta(f(x))\,dx = \frac{h(x_0)}{(df/dx)_{x_0}}$

$$\Rightarrow d\sigma \propto \int \frac{P_f^{\cancel{2}}\,d\Omega_f}{E_1'\cancel{E_2'}}\ \frac{1}{\underbrace{\dfrac{d(E_1'+E_2'-E_i)}{dP_f}}_{\frac{P_f}{E_1'}+\frac{P_f}{E_2'} = \frac{E_1'+E_2'}{\cancel{E_1'E_2'}}\cancel{P_f}}}\Bigg|_{E_1'+E_2'=E_i} = \int \frac{P_f}{E_i}\,d\Omega_f$$

$$E_1'^2 = P_f^2 + m^2 \Rightarrow 2dE_1'\,E_1' = 2P_f\,dP_f$$

$$E_2'^2 = P_f^2 + M^2 \Rightarrow \frac{dE_2'}{dP_f} = P_f/E_2'$$

$$d\sigma = \frac{1}{16\pi^2}\frac{d^3P_1'}{E_1'}\frac{d^3P_2'}{E_2'}\frac{M^2}{|\vec P_1|M}\delta(P_f-P_i)\,\frac{1}{2}\sum_{S_i,S_f}|M_{fi}|^2$$

$\rightarrow |\vec P_i|(E_1+E_2)$ به جای این

را قرار می‌دهیم چون در CM

کار می‌کنیم.

$$\Rightarrow d\sigma = \frac{1}{32\pi^2}\frac{M^2}{\underbrace{(E_1+E_2)}_{E_i}\underbrace{|\vec P_i|}_{\cancel{|\vec P_f|}}}\frac{\cancel{|\vec P_f|}}{E_i}\int d\Omega_f\sum_{spin}|M_{fi}|^2$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega_f}\Big|_{CM} = \frac{1}{32\pi^2}\left(\frac{M}{E_i}\right)^2\sum_{spin}|M_{fi}|^2 \quad (I)$$

$$\gamma\cdot k' = A = \gamma^\mu k_\mu$$

داشتیم: $\displaystyle M_{fi} = 2g^2\,\bar u_{s'}(p')\,\gamma\cdot k'\,u_s(p)\,\frac{1}{2p\cdot k' - m^2}$

$$\Rightarrow |M_{fi}|^2 = \frac{4g^4}{(2p\cdot k'-m^2)^2}(\bar u' A u)\underbrace{(\bar u' A u)^+}$$

$$(u'^+\gamma^0 A u)^+ = \underbrace{u^+\gamma^0}_{\bar u}\gamma^0 A^+\gamma^{0+}u' = \bar u\,\underbrace{\gamma^0 A^+\gamma^0}_{\bar A}u'$$

$$\bar{A} = \gamma^0(\gamma^\mu k_\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0(-\gamma^i k_i + \gamma^0 k_0)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0(\gamma^i k_i + \gamma^0 k_0)\gamma^0 = -\gamma^i k_i + \gamma^0 k_0 = \gamma \cdot k$$

$$(\bar{u}' A u)(\bar{u}' A u)^\dagger = \bar{u}' A u \, \bar{u} \bar{A} u' = \bar{u}'_k A_{kl} u_l \bar{u}_m \bar{A}_{mi} u'_i$$

$$\sum_{spin} (\bar{u}' A u)(\bar{u}' A u)^\dagger = \Big(\underbrace{\sum_{s'} u_i'^{(s')}(p') \bar{u}_k'^{(s')}(p')}_{\frac{(\gamma\cdot p' + M)_{ik}}{2M}} \Big) A_{kl} \Big(\underbrace{\sum_{s} u_l^{(s)}(p) \bar{u}_m^{(s)}(p)}_{\frac{(\gamma\cdot p + M)_{lm}}{2M}} \Big) \bar{A}_{mi}$$

از رابطه 2.145 :

$$= \frac{1}{4M^2} \, tr \Big[\underbrace{(\gamma\cdot p' + M)\,\gamma\cdot k'}_{(\gamma\cdot p')(\gamma\cdot k') + M(\gamma\cdot k')} \, \underbrace{(\gamma\cdot p + M)\,\gamma\cdot k'}_{(\gamma\cdot p)(\gamma\cdot k') + M\gamma\cdot k'} \Big]$$

trace تعداد فرد از ماتریس های γ صفر می شود .

$$= \frac{1}{4M^2} \, tr \Big\{ (\gamma\cdot p')(\gamma\cdot k')(\gamma\cdot p)(\gamma\cdot k') + M^2 (\gamma\cdot k')^2 \Big\}$$

طرح : $Tr(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b) = 4\, a\cdot b$

$$Tr(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b)(\gamma\cdot c)(\gamma\cdot d) = -Tr(\gamma\cdot b)(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot c)(\gamma\cdot d) + 2a\cdot b\, Tr(\gamma\cdot c)(\gamma\cdot d)$$

$$= \frac{1}{4M^2} \Big\{ - \underbrace{tr(\gamma\cdot k')(\gamma\cdot p')(\gamma\cdot p)(\gamma\cdot k')}_{2k'^2\, tr(\gamma\cdot p')(\gamma\cdot p) = 2m^2 (p'\cdot p)} + 2\, p'\cdot k' \, \underbrace{tr(\gamma\cdot p)(\gamma\cdot k')}_{4\, p\cdot k'} + M^2 \times 4 \underbrace{k'^2}_{m^2} \Big\}$$

در دستگاه CM : $|\vec{p}| = |\vec{p}'| = |\vec{k}| = |\vec{k}'| = q$

$$\Longrightarrow \sum_{spin} |M_{fi}|^2 = \frac{g^4}{M^2} \Big(\frac{1}{2p\cdot k' - m^2} \Big)^2 4 \Big\{ 2(p\cdot k')(p'\cdot k') + m^2 \big[M^2 - (p'\cdot p) \big] \Big\}$$

$$p = \big(\sqrt{q^2 + M^2}, \vec{q}\big) \qquad p' = \big(\sqrt{q^2 + M^2}, \vec{q}'\big)$$

$$k = \big(\sqrt{q^2 + M^2}, -\vec{q}\big) \qquad k' = \big(\sqrt{q^2 + M^2}, -\vec{q}'\big)$$

در انرژی های پایین : $m, M \gg q$, $p\cdot k' \simeq Mm$, $p'\cdot k' \simeq Mm$, $p\cdot p' \simeq M^2$

$$\Longrightarrow \sum_{spin} M_{fi}^2 \simeq \frac{8g^4}{(2M - m)^2}$$

در رابطه (I)، سطح مقطع، در انرژی های پایین، می توان 2M را با m+M تقریب زد. در این صورت :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{g^4}{4\pi^2} \Big(\frac{M}{m+M} \Big)^2 \frac{1}{(2M-m)^2} \overset{m \ll M}{\simeq} \frac{g^4}{16\pi^2} \frac{1}{M^2}$$