

فتن برهم کشن در جرم

$$\mathcal{C}(x_1, x_2) = i D_F(x_1 - x_2) - \frac{g}{2} D_F(0) \int d^4 z D_F(z - x_1) D_F(z - x_2) + O(g^2)$$

$$D_F(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} d^4 k$$

در مقياس در $k^2 = m^2$ در جرم برابر m است.

نشان می دهیم که برهم کشن، جرم فیزیکی ذره را تغییر می دهد:

$$\mathcal{C}(x_1, x_2) = -\frac{g}{2} \frac{D_F(0)}{(2\pi)^8} \int \frac{e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{e^{-iq \cdot (x_2 - x_1)}}{q^2 - m^2 + i\epsilon} d^4 p d^4 q d^4 z$$

$$= -\frac{g}{2} \frac{D_F(0)}{(2\pi)^8} \int \frac{e^{-ip \cdot x_1 - iq \cdot x_2}}{(p^2 - \dots)(q^2 - \dots)} d^4 p d^4 q \int \underbrace{e^{iz \cdot (p+q)}}_{(2\pi)^4 \delta^4(p+q)} d^4 z$$

$$= -\frac{g}{2} \frac{D_F(0)}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)^2} d^4 p$$

$$\Rightarrow \mathcal{C}(x_1, x_2) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left[1 + \frac{\frac{g}{2} D_F(0)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right] d^4 p$$

$$\left[1 - \frac{\frac{g}{2} D_F(0)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right]^{-1}$$

$$\Rightarrow \mathcal{C}(x_1, x_2) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon - \frac{g}{2} D_F(0)} d^4 p$$

bare mass یعنی جرمی که برهم کشن ندارد $\rightarrow$ pole: $m^2 + \frac{g}{2} D_F(0) \equiv m^2 + \delta m^2 = m_r^2$

که جرم فیزیکی یا renormalized mass

حبل در طبیعت ذره ای نداریم که اندک نش نداشته باشد، این تئران bare mass را اندازه گیریست.

δm^2 یک کمیت و اثر است چون $D_F(0)$ ای که در آن در حد دارد، برای تئران چهار جرم P (در صورت $d=4$) و تئران P در فضا است. یعنی یک می باشد در m_{bare} قراردادیم تا یک m محدود فیزیکی باشیم. تعجب کنید که m_r همان جرمی نیست که در تئران فیزیکی ظاهر می شود.

4-point function

$$\mathcal{C}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\delta^4 \mathcal{Z}[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \Big|_{J=0}$$

قبل از این را برای ذره آزاد بدست آورده بودیم.

بعد درسته g برای این سانه نیز همان می شود:

$$g^0 \text{ مرتبه} = -D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) - D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) - D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3)$$

$$= - \left(\frac{1}{3} \frac{2}{4} + \frac{1}{3} \frac{2}{4} + \frac{1}{3} \frac{2}{4} \right) = -3 (=)$$

نتیجه: $\mathcal{Z}[J] = [1 - ig/4! \int (6i \text{---} \bigcirc + X) dz] \exp(-\frac{ig}{2} J \bigcirc_F J)$

مجموعه مربوط به z $= \frac{g}{4} \frac{\delta^4}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_4)} \left\{ \frac{0}{\exp[-\frac{ig}{2} J(x) \bigcirc_F(x-y) J(y)]} \right\} \Big|_{J=0}$

نتیجه: $\frac{ig}{2} J \bigcirc_F J$

$$= -ig \frac{g}{2} \bigcirc_F(0) \int dz \left\{ \begin{aligned} & \bigcirc_F(z-x_1) \bigcirc_F(z-x_2) \bigcirc_F(x_3-x_4) \\ & + \bigcirc_F(z-x_1) \bigcirc_F(z-x_3) \bigcirc_F(x_2-x_4) \\ & + \bigcirc_F(z-x_1) \bigcirc_F(z-x_4) \bigcirc_F(x_2-x_3) \\ & + \bigcirc_F(z-x_2) \bigcirc_F(z-x_3) \bigcirc_F(x_1-x_4) \\ & + \bigcirc_F(z-x_2) \bigcirc_F(z-x_4) \bigcirc_F(x_1-x_3) \\ & + \bigcirc_F(z-x_3) \bigcirc_F(z-x_4) \bigcirc_F(x_1-x_2) \end{aligned} \right\} = -ig \frac{g}{2} \frac{x_1 \text{---} \bigcirc \text{---} x_2}{x_3 \text{---} x_4} \times 6$$

$\Rightarrow$ مجموعه مربوط به z $= -3ig \left[\text{---} \bigcirc \text{---} \right]$

X مجموعه مربوط به X $= -ig \frac{g}{4!} \frac{\delta^4}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_4)} \left\{ X e^{-\frac{ig}{2} J \bigcirc_F J} \right\} \Big|_{J=0}$

$\left[\int \bigcirc_F(z-x) \delta(x) dz \right]^4$

$= -ig \frac{g}{4!} \int \bigcirc_F(z-x_1) \bigcirc_F(z-x_2) \bigcirc_F(z-x_3) \bigcirc_F(z-x_4) dz \times 4! = -ig [X]$

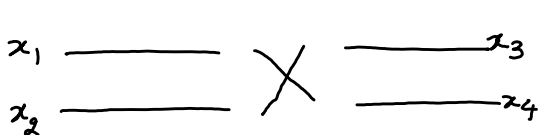
نکته برای تاج 4 نقطه نامرتبه داریم:

$\mathcal{Z}(x_1, \dots, x_4) = -3 [=] - 3ig \left(\text{---} \bigcirc \text{---} \right) - ig(X)$

$= -3 [=] - ig \frac{g}{4!} \left[12 \times 6 \text{---} \bigcirc \text{---} + 24 X \right]$

توجه کنید که این ضریب 6 از قبل در [تاج 2] بوده

برای حباب بدون ضریب 1:



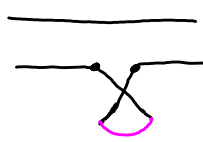
کمی این که --- اضافه شود، مسرت راه داریم که x_1 به x_2 یا x_3 یا x_4 وصل شود. آن صیحاتی می ماند:



آنکه 4 ورتکس داریم و دو نقطه بین به اندازه 4×2 حالت می توانیم یک نقطه را به ورتکس حاصل کنیم.
 می توان گفت با (4) یکی از ورتکس را انتخاب می کنیم و با (2) یکی از نقاط را.

آنکه این شکل را داریم: حال باید یکی از ورتکس انتخاب شود تا به یک نقطه باقی مانده وصل شود.
 به: (3)

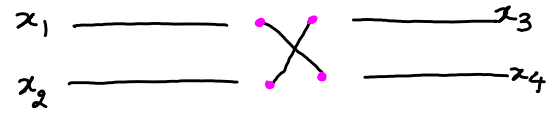
اگر یک دایره شکل را داریم : برای وصل کردن دو سرش با یک خط افقی یا عمودی



① $3 \times 4 \times 2 \times 3 = 12 \times 6$

برای حساب کردن ضریب جمله ② :

چهار راه داریم که x_1 را به هر کدام از چهار نقطه وصل کنیم.



سپس سه راه داریم که x_2 را وصل کنیم پس دوره برای x_3 باقی می ماند

یک راه برای x_4 پس :

② $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

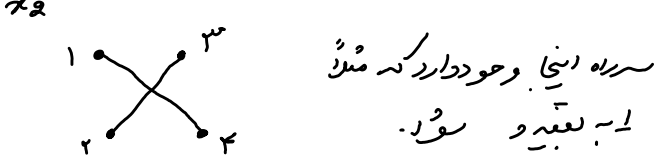
حال فرض کنید چنین دایگرافی داشته باشیم و می خواهیم ضریب آن را حساب کنیم :

{ این ها باجهای آزاد هستند



استه این دایگرام ظاهر نمی شود چون [در] از زمانه می کنیم

x_1 x_3 x_2 x_4 سه راه وجود دارد که x_1 به هر کدام از باجهای آزاد وصل شود



$\Rightarrow$ ضریب این جمله $= 3 \times 3$

سپس به طور خلاصه ، قوانین فاینمان برای تئوری ϕ^4 در

فضای مختصات به صورت مقابل است :

در فرآیندهای واقعی که مقدار استون مربوط به درج و ذرات

کین می بینیم ، خاکستر تعادل نداریم

نکته جدی : یک سری دایگرام به این شکل داریم : disconnected diagram



connected diagram گفته می شود

در اینجا دو تابع دو نقطه در هم ضرب شده اند ولی در مورد X چنین نیست که به آن

آنچه اهمیت دارد ، دایگرامهای متصل هستند در واقع دایگرامهای غیر متصل

روست trivial ماتریسی ماتریس ی ظاهری شوند

تأثیر مولد برای دایگرامهای متصل

$Z[J] = e^{iW[J]}$ $\leftarrow$ effective action $\leftarrow$ classical action

$\Rightarrow W[J] = -i \ln Z[J]$

$\Rightarrow \frac{\delta W}{\delta J} = -i \frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{\delta J} \Big|_{J=0} = 0$

$\frac{\delta^2 W}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} = \frac{i}{Z^2} \frac{\delta Z}{\delta J(x_1)} \frac{\delta Z}{\delta J(x_2)} \Big|_{J=0} - i \frac{1}{Z} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} = i \mathcal{G}(x_1, x_2)$

یعنی تابع دو نقطه از روی Z و از روی W کین است که قابل بهی بین دو چیز در مورد تابع دو نقطه فقط دایگرامهای متصل داریم

$\frac{\delta^3 W}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_3)} \Big|_{J=0} = i \left\{ \frac{2}{Z^3} \frac{\delta Z}{\delta J(x_3)} \frac{\delta Z}{\delta J(x_2)} \frac{\delta Z}{\delta J(x_1)} \Big|_{J=0} + \frac{1}{Z^2} \frac{\delta^3 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3)} \Big|_{J=0} + \dots \right\}$

جمله های بعدی به جمله دوم

$$+ \frac{1}{Z^2} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_3)} \frac{\delta^2 Z}{\dots} \Big|_{J=0} - \frac{1}{Z} \frac{\delta^3 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3)} \Big|_{J=0}$$

فقط حبابات غیر صفر را برای مشتق داریم زیرا صفر است :

$$\frac{\delta^4 W}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_4)} = i \left\{ \frac{1}{Z^2} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_3) \delta J(x_4)} + (1,3)(2,4) + (1,4)(2,3) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{Z} \frac{\delta^4 Z}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_4)} \right\} \Big|_{J=0} = i \left\{ \mathcal{C}(x_1, x_2) \mathcal{C}(x_3, x_4) + \dots - \mathcal{C}(x_1, x_2, x_3, x_4) \right\}$$

$$= i \left\{ \begin{aligned} & \left(i \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} - g \frac{1}{2} \text{diagram} \right) \left(i \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta J(x_3) \delta J(x_4)} - g \frac{1}{2} \text{diagram} \right) \\ & \left(i \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta J(x_1) \delta J(x_3)} - g \frac{1}{2} \text{diagram} \right) \left(i \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta J(x_2) \delta J(x_4)} - g \frac{1}{2} \text{diagram} \right) \\ & \left(i \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta J(x_1) \delta J(x_4)} - g \frac{1}{2} \text{diagram} \right) \left(i \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta J(x_2) \delta J(x_3)} - g \frac{1}{2} \text{diagram} \right) \end{aligned} \right.$$

$$+ \left(\frac{1}{3} \frac{\delta^3}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3)} + \frac{1}{2} \frac{\delta^3}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_4)} + \frac{1}{2} \frac{\delta^3}{\delta J(x_1) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} + \frac{1}{1} \frac{\delta^3}{\delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \right) + i g \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \frac{\delta^3}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3)} + \frac{1}{2} \frac{\delta^3}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_4)} + \frac{1}{2} \frac{\delta^3}{\delta J(x_1) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} + \frac{3}{1} \frac{\delta^3}{\delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \right) + \frac{g^2}{4!} \left(\text{diagram} + \text{diagram} + \dots \right) = -g(X)$$

سپید این ترتیب فقط با گرام مشتق باقی ماند.

$$\Rightarrow \mathcal{C}(x_1, \dots, x_4) = \frac{-1}{i} \frac{\delta^4 W}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_4)}$$

$$n\text{-point function: } \mathcal{C}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}$$

$$\text{irreducible } n\text{-point function: } \mathcal{I}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}$$

$$\Rightarrow \text{برای تابع ۴ نقطه: } i \mathcal{I}(x_1, \dots, x_4) = -igX \Rightarrow \text{diagram} = \text{diagram} + \text{diagram}$$

↓ ربط نامرئی و

$$\text{diagram} = X + \text{diagram} + \text{diagram}$$

← تابع موله این ها $W[J]$ است.

فرمولهای درختی تابعی

متوجه داشتیم که میدانهای نرمش زبر در رابطه با درجایایی تعجب می کنند: $\{ \psi(x), \psi(y) \} = 0$ (برای همزمانی)

درحالت عادی (شترال) میدانها در پرتو نیستند بلکه درج کلاسیکی (c-number) دارند و می توانیم که خصوصیت فرموله نمود.

همه بازنویسی می شد که داریم که c-number ها خاصیت با درجایایی دارند. یعنی ψ ها به عنوان ψ در پرتو باشند، خاصیت

با درجایایی دارند که به آنها اعداد گراسمان (Grassmann) می گویند.

$$\{c_i, c_j\} = 0 \Rightarrow c_i^2 = 0$$

$$\text{مختارین از متغیرها: } f(c) = a_1 + a_2 c$$

$$\text{و متغیره: } f(c_1, c_2) = a_0 + a_1 c_1 + a_2 c_2 + \underbrace{a_3 c_1 c_2}_{= -a_3 c_2 c_1}$$

حجت شیب $c_1^2 c_2^2$ نداریم چون $0 = c_1^2$

$$c_1 c_2 c_1 \times \\ - c_1 c_1 c_2 = 0$$

مشتق تری توابع گراسمان

$$\frac{\partial f}{\partial c_1} = \frac{\partial^L f}{\partial c_1} = a_1 + a_3 c_2 \quad (I)$$

$$\frac{\partial f}{\partial c_2} = \frac{\partial^L f}{\partial c_2} = a_2 - a_3 c_1$$

$$\frac{\partial^R f}{\partial c_1} = a_1 - a_3 c_2$$

و توان مشتق راست را هم داشت:
 وی بصورت متصور از مشتق تری، مشتق چپ است.

$$\text{رابطه کلی: } \frac{\partial^L}{\partial c_i} f(c_1, c_2, \dots, c_{i_k}) = \sum_{l=1}^k c_{i_1} \dots c_{i_{l-1}} \text{ جزء } c_{i_{l+1}} \dots c_{i_k} (-1)^{l-1}$$

$$\frac{\partial^R}{\partial c_i} f(c_1, c_2, \dots, c_{i_k}) = \sum_{l=1}^k c_{i_1} \dots c_{i_{l-1}} \text{ جزء } c_{i_{l+1}} \dots c_{i_k} (-1)^{k-l}$$

$$[\partial_{c_i}, \partial_{c_j}] = \delta_{ij} \quad \text{در مورد c-number های عادی داریم:}$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial c_i}, c_j \right\} = \delta_{ij} \quad \text{و خواهیم همین رابطه را برای پارامترهای گراسمانی داشته باشیم:}$$

دری تابع در متغیره انتقال می کنیم:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial c_1}, c_1 \right\} f(c_1, c_2) = \frac{\partial}{\partial c_1} (c_1 f) + c_1 \frac{\partial}{\partial c_1} f$$

$$a_0 c_1 + a_1 c_1^2 + a_2 c_1 c_2 + a_3 c_1^2 c_2$$

$$= \frac{\partial}{\partial c_1} (a_0 c_1 + a_2 c_1 c_2) + c_1 (a_1 + a_3 c_2) = a_0 + a_2 c_2 + a_1 c_1 + a_3 c_1 c_2 = f(c_1, c_2) \quad \checkmark$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial c_2}, c_1 \right\} f(c_1, c_2) = \frac{\partial}{\partial c_2} (c_1 f) + c_1 \frac{\partial}{\partial c_2} f = -a_2 c_1 + c_1 (a_2 - a_3 c_1) = -a_3 c_1^2 = 0 \quad \checkmark$$

$$a_2 - a_3 c_1$$

هم چنین:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial c_1}, \frac{\partial}{\partial c_2} \right\} f(c_1, c_2) = \frac{\partial}{\partial c_1} \frac{\partial f}{\partial c_2} - \frac{\partial}{\partial c_2} \frac{\partial f}{\partial c_1} = -a_3 + a_3 = 0$$

$$a_2 - a_3 c_1$$

$$a_1 + a_3 c_2$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{\partial}{\partial c_i}, \frac{\partial}{\partial c_j} \right\} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial c^2} = 0 \Rightarrow \text{از توابع غیر توان مشتق درجه دوم گرفته}$$

انتگرال تری توابع گراسمان

$$\text{دستگاه: } \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} = 0 \Rightarrow \int \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} dc = \int \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{\partial f}{\partial c} \right) dc = \frac{\partial f}{\partial c} = 0$$

سبب به صورت عادی غیر توان انتگرال گرفته. چون خود تابع باید صفر باشد تا این روش جواب دهد.

از این نکته استفاده می کنیم که توابعی که روی کل فضا انتگرال تری می شوند تحت انتقال نامرده اند:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = x + a \\ dx &\rightarrow dx' = dx \end{aligned} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+a) d(x+a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

اگر بخواهیم این خصوصیت برای گراسمانها برقرار باشد، باید $\int c dc$ تحت انتقال نامرده باشد.

$$\int c dc \rightarrow \int (c+a) d(c+a) = \int dc c + a \int dc = 0 \quad \text{باید:}$$

هم چنین تعریف می کنیم $\int dC C = 1$ یعنی انتگرال تدرج حفظ است. در این صورت مشتق و انتگرال به یک شکل عمل می کنند:

$$\int dC_1 \neq = \int dC_1 (a_0 + a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_1 C_2) = a_0 \int dC_1 + a_1 \int dC_1 C_1 + a_2 \int dC_1 C_2 + a_3 \int dC_1 C_1 C_2$$

$\int C_2 dC_1 = -C_2 \int dC_1$

$$+ a_3 \int dC_1 C_1 C_2 = a_1 + a_3 C_2 \int C_1 dC_1 = a_1 + a_3 C_2 \rightarrow \text{همانند رابطه در است}$$

انتگرال تدرج برای مربوط به گراسمان

فرض کنید که یک فضای دوگراسمان داریم که $C_1 = \eta$, $C_2 = \bar{\eta}$, η , $\bar{\eta}$ از هم مستقل هستند.

$$\eta^2 = \bar{\eta}^2 = 0 \rightarrow e^{-\bar{\eta}\eta} = 1 - \bar{\eta}\eta + \frac{(\bar{\eta}\eta)^2}{2!} - \frac{(\bar{\eta}\eta)^3}{3!} + \dots$$

$$(\bar{\eta}\eta)(\bar{\eta}\eta) = \bar{\eta}(-\bar{\eta}\eta)\eta = -\bar{\eta}^2\eta^2 = 0$$

$$\int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} = \int d\bar{\eta} \int d\eta - \int d\bar{\eta} d\eta \bar{\eta}\eta = + \int d\bar{\eta} \bar{\eta} \int d\eta \eta = +1$$

این روش را به عبارات دیگر می توانیم بنویسیم:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \bar{\eta} = \begin{pmatrix} \bar{\eta}_1 \\ \bar{\eta}_2 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{\eta}\eta = \bar{\eta}^T \eta = \bar{\eta}_1 \eta_1 + \bar{\eta}_2 \eta_2$$

$$e^{-\bar{\eta}\eta} = 1 - \bar{\eta}\eta + \frac{(\bar{\eta}\eta)^2}{2!} + \dots$$

$$(\bar{\eta}\eta)^2 = (\bar{\eta}_1 \eta_1 + \bar{\eta}_2 \eta_2)^2 = -\bar{\eta}_1^2 \eta_1^2 - \bar{\eta}_2^2 \eta_2^2 + \bar{\eta}_1 \eta_1 \bar{\eta}_2 \eta_2 + \bar{\eta}_2 \eta_2 \bar{\eta}_1 \eta_1$$

$-\bar{\eta}_1 \eta_2$
 $-\eta_1 \bar{\eta}_2$

$$\Rightarrow \text{همانند} = + \bar{\eta}_2 \bar{\eta}_1 \eta_1 \eta_2 = + \bar{\eta}_1 \eta_1 \bar{\eta}_2 \eta_2$$

$$\Rightarrow (\bar{\eta}\eta)^2 = 2 \bar{\eta}_1 \eta_1 \bar{\eta}_2 \eta_2$$

$$(\bar{\eta}\eta)^3 = (\bar{\eta}\eta)^2 (\bar{\eta}\eta) = 2 \bar{\eta}_1 \eta_1 \bar{\eta}_2 \eta_2 (\bar{\eta}_1 \eta_1 + \bar{\eta}_2 \eta_2) = 2 \bar{\eta}_1 \eta_1 \bar{\eta}_2 \eta_2 \bar{\eta}_1 \eta_1 + 2 \bar{\eta}_1 \eta_1 \bar{\eta}_2 \eta_2 \bar{\eta}_2 \eta_2 = 0$$

$$\Rightarrow (\bar{\eta}\eta)^n = 0 \quad (n > 0) \Rightarrow e^{-\bar{\eta}\eta} = 1 - \bar{\eta}_1 \eta_1 - \bar{\eta}_2 \eta_2 + \bar{\eta}_1 \eta_1 \bar{\eta}_2 \eta_2$$

$$\int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} = 0 - 0 - 0 + \int d\bar{\eta}_1 d\bar{\eta}_2 d\eta_1 d\eta_2 \bar{\eta}_1 \eta_1 \bar{\eta}_2 \eta_2 = + \int d\bar{\eta}_1 d\bar{\eta}_2 \bar{\eta}_1 \int d\eta_1 d\eta_2 \eta_1 \eta_2$$

$-\bar{\eta}_1 d\eta_2$
 $-\eta_1 d\bar{\eta}_2$

$$= - \int d\bar{\eta}_1 d\bar{\eta}_2 d\eta_2 \eta_1 \bar{\eta}_2 \eta_2 = - \int d\bar{\eta}_1 d\bar{\eta}_2 \underbrace{d\eta_2 \eta_2}_{=1} \eta_1 \bar{\eta}_2 = - \int d\bar{\eta}_1 d\bar{\eta}_2 (-\bar{\eta}_2 \eta_1) = +1$$

همانند حالت یک می باشد.

$$\eta \rightarrow M \alpha$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\eta} \rightarrow N \bar{\alpha}$$

تبدیل گراسمان

M, N ماتریس های 2×2 عادی هستند.

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{\eta}_1 \\ \bar{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \end{pmatrix}$$

$$\eta_1 \eta_2 = (M_{11} \alpha_1 + M_{12} \alpha_2)(M_{21} \alpha_1 + M_{22} \alpha_2) = M_{11} M_{22} \alpha_1 \alpha_2 + M_{12} M_{21} \alpha_2 \alpha_1 - \underbrace{(M_{11} M_{22} - M_{12} M_{21})}_{\det M} \alpha_1 \alpha_2$$

حالتی ضاهیم انتقال را روی α_1, α_2 ببریم، احتیاج به تراکمین تبدیل داریم که اینجا با حالت عادی فرق دارد.

در حالت عادی: $d\eta_1 d\eta_2 = \partial \left(\frac{\eta_1 \eta_2}{\alpha_1 \alpha_2} \right) d\alpha_1 d\alpha_2$

$$\partial = \left| \frac{\partial \eta_i}{\partial \alpha_j} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \eta_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \eta_1}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \eta_2}{\partial \alpha_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{vmatrix} = \det M$$

در این جا، تراکمین تبدیل به صورت متکون ظاهر می شود:

$$d\eta_1 d\eta_2 = (\det M)^{-1} d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$\underline{d\eta} = (\det M)^{-1} d\alpha$$

دانش: $\int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta} \eta} = 1 \rightarrow (\det M)^{-1} (\det N)^{-1} \int d\bar{\alpha} d\alpha e^{-\bar{\alpha}^T N^T M \alpha} = 1$

$$N^T M = A \rightarrow \det A = \det(N^T M) = \det N^T \cdot \det M = \det N \cdot \det M$$

$$\Rightarrow \int d\bar{\alpha} d\alpha e^{-\bar{\alpha}^T A \alpha} = \det N \cdot \det M = \det A$$

در مورد متغیرهای معمولی، باید به جواب $(\det A)^{-1}$ برسیم.

حال اگر N متغیر داشته باشیم:

$$\int d\bar{\alpha}_1 \dots d\bar{\alpha}_N d\alpha_1 \dots d\alpha_N e^{-\bar{\alpha}^T A \alpha} = (-1)^{\frac{N(N+1)}{2}} (\det A)$$

در حد $N \rightarrow \infty$ ، باید به جای N ها از $C(x)$ استفاده کنیم:

$$\{C(x), C(y)\} = 0, \quad \int dC(x) = 0, \quad \int dC(x) C(x) = 1, \quad \frac{\delta R(C(x))}{\delta C(y)} = \delta(x-y)$$

کوانتیز کردن میدانهای فرمیونی

از شباهت با آنچه برای میدانهای اسکالر انجام دادیم، برای میدانهای فرمیونی که به صورت گراسمان در نظر گرفته می شوند، انجام می دهیم:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi(x)$$

source term را هم در نظر می گیریم.

Normalized generating functional: $Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{N} \int d\bar{\Psi} d\Psi \exp[i] (\bar{\Psi} (i\gamma \cdot \partial - m) \Psi + \bar{\eta} \Psi + \bar{\Psi} \eta) dx$

$$N = \int d\bar{\Psi} d\Psi \exp[i] \bar{\Psi} (i\gamma \cdot \partial - m) \Psi dx, \quad Z[\eta=0, \bar{\eta}=0] = 1$$

در ضاهیم این Z به شکل رابطه 6.13 می بینیم تا بتوانیم مشتق گیری تابع انجام دهیم و تابع گرین و عناصر ماتریس S را بدست آوریم.

برای این که ساده سازی انجام دهیم:

$$S^{-1} = i\gamma^\mu \partial_\mu - m \quad (I)$$

$$Q(\Psi, \bar{\Psi}) = \bar{\Psi} S^{-1} \Psi + \bar{\eta} \Psi + \bar{\Psi} \eta = \bar{\Psi}_k (S^{-1})_{kl} \Psi_l + \bar{\eta}_k \Psi_k + \bar{\Psi}_k \eta_k$$

برای حد min به Ψ می دهیم چون همه درجه های فرمیونی مورد دقت همه درجه دوم داریم. در این صورت تبدیل انتقال $\int d\bar{\alpha} d\alpha e^{-\bar{\alpha}^T A \alpha}$ داریم.

$$\partial Q / \partial \bar{\Psi}_i = (S^{-1})_{il} \Psi_l + \eta_i = 0 \Rightarrow S^{-1} \Psi + \eta = 0 \Rightarrow \Psi_{min} = -S\eta$$

$$\partial Q / \partial \psi_i = -\bar{\psi}_k (S^{-1})_{ki} - \bar{\eta}_i = 0 \Rightarrow \bar{\psi} S^{-1} + \bar{\eta} = 0 \Rightarrow \bar{\psi}_{min} = -\bar{\eta} S$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \bar{\psi}_j \partial \psi_i} = -(S^{-1})_{ji}, \quad \frac{\partial Q}{\partial \psi_j \partial \bar{\psi}_i} = (S^{-1})_{ij}, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial \psi_j \partial \psi_i} = \frac{\partial^2 Q}{\partial \bar{\psi}_j \partial \bar{\psi}_i} = 0$$

نصفه مشتقات هم صفر نیستند

$$\Rightarrow Q = Q_m + \int \frac{\partial Q}{\partial \psi_i} \bigg|_{\bar{\psi}} (x_i - \bar{x}_i) + \frac{1}{2} \int \frac{\partial^2 Q}{\partial \psi_i \partial \psi_j} \bigg|_{\bar{\psi}} (x - \bar{x}_i)(x - \bar{x}_j)$$

$\rightarrow (\bar{\psi} - \bar{\psi}_m) S^{-1} (\psi - \psi_m)$

$$\Rightarrow Q_m = (-\bar{\eta} S) S^{-1} (-S \eta) + \bar{\eta} (-S \eta) + (-\bar{\eta} S) \eta = -\bar{\eta} S \eta - \bar{\eta}_i S_{ij} \eta_j$$

نصفه
نصفه

$$\Rightarrow Z_0 = \frac{1}{N} \int D\bar{\psi} D\psi \exp[i(Q_m + (\bar{\psi} - \bar{\psi}_m) S^{-1} (\psi - \psi_m))] dx$$

$$= \frac{1}{N} e^{-i \int \bar{\eta}(x) S(x-y) \eta(y) dx dy} \int D\psi D\bar{\psi} e^{i \int (\bar{\psi} - \bar{\psi}_m) S^{-1} (\psi - \psi_m) dx}$$

$$\int d\bar{\alpha} d\alpha e^{-\bar{\alpha} A \alpha} = \det A \rightarrow \det(-i S^{-1})$$

III

$$N = \det(-i S^{-1}) \Rightarrow Z_0[\eta, \bar{\eta}] = e^{-i \int \bar{\eta}(x) S(x-y) \eta(y) dx dy}$$

حالتی که $\eta = \bar{\eta} = 0 \Rightarrow N = \det(-i S^{-1})$

حالاتی که $\eta = \bar{\eta} = 0 \Rightarrow N = \det(-i S^{-1})$

اگر $S^{-1} S = \delta$ باشد، باید $S^{-1} S = \delta$

$$\Rightarrow S^{-1} S = (i \gamma^\nu \partial_\nu - m)(i \gamma^\mu \partial_\mu + m) D_F(x)$$

$$= (-\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu - m^2) D_F(x)$$

$$\{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = 2g^{\mu\nu} \rightarrow \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu = (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) \partial_\mu \partial_\nu = 2\Box - \gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\mu \partial_\nu$$

$$\Rightarrow 2\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu = 2\Box$$

$$\Rightarrow S^{-1} S = (-\Box - m^2) D_F(x) = \delta^4(x)$$

K.G
تکامل کننده حالت نوبتی D_F تابع گرین معادله لایو و مکسول آن
($\Box + m^2$) است که در این جامع به همین صورت است.

$$\mathcal{C}(x, y) = - \frac{\delta^2 Z_0[\eta, \bar{\eta}]}{\delta \eta(x) \delta \bar{\eta}(y)} \bigg|_{\eta = \bar{\eta} = 0} = i S(x-y)$$

فرمولهای انتگرال زده آزاد میدانهای (سپینوری و اسکالار) را در زیر خلاصه کرده ایم:

Scalar fields: $\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = -\frac{1}{2} \phi (\Box + m^2) \phi$

2-point function: $\mathcal{C}(x, y) = i D_F(x-y)$; $(\Box + m^2) D_F(x-y) = -\delta^4(x-y)$

spinor fields: $\mathcal{L}_0 = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi = \bar{\psi} S^{-1} \psi$

2-point function: $\mathcal{C}(x, y) = i S(x-y)$

توجه کنید که دقیقاً مثل حالت اسکالار، تابع دو نقطه اسپینور
مکسول ماتریسی است که در لایو زنی ظاهر می شود

حال ما استفاده از تمار فیزیکی که هسته را بررسی می کنیم .

$$\text{داریم : } \frac{\delta^2}{\delta \eta(x) \delta \eta(y)} = - \frac{\delta^2}{\eta(y) \delta \eta(x)}$$

حال فرض کنیم که یک لوب فرمونی داریم :  -----

یعنی یک میدان استواری داریم که به یک میدان اسکالر گوییم. در این صورت ، باید تعیین بهشت اگر ذره آزاد اسکالر اعمال کنیم .
که شامل یک لوب فرمونی بسته و دو ورتکس است . تابع دو نقطه در این حالت (از تانسور موله که شامل یک ورتکس است) بدست می آید :

$$\text{دستیم : } Z[\eta] = N \exp \left[i \int_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta} \right) dx \right] Z_0 \Rightarrow Z[\eta, \bar{\eta}] = \exp \left[i \int_{int} \left(i \frac{\delta}{\delta \eta} , \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \right) dx \right] Z_0[\eta, \bar{\eta}]$$

ازت هست با حالت بوزونی ، محاسبه نرم بکار می آوریم :

$$- \frac{1}{2} \int dx dy dz dz' d\eta' \bar{\eta}(x) \delta(x-y) \eta(y) \bar{\eta}(x') \delta(x'-y') \eta(y')$$

$$\frac{\delta^2}{\delta \bar{\eta}_j(z) \delta \eta_j(z)} \frac{\delta^2}{\delta \bar{\eta}_k(z') \delta \eta_k(z')} Z[\eta, \bar{\eta}] \propto + S_{ij}(z-z') S_{kj}(z'-z)$$

این ضرب دقت کنید که منفی حالت بوزونی است .
نکته : ضرب η در حالت بوزونی به این علت ظاهر می شود که میدان ϕ حقیقی است .