

حلبه دوم: فصل ۲: نوسانگرهای هارمونیک ساده - تقسیم به سه فونون

فصل ۳: غانجی برداشتال ذره در جعبه جاذبیه حالت پایه (نوسانگر) تقریباً پذیرد و در تقارن هدر به نوسان

Note Title

۱۳۹۹/۰۱/۲۰

فصل ۲: نوسانگرهای هارمونیک ساده - کوانتیزاسیون

حالت پایه نوسانگر را بر حسب غانجی برداشتال می نویسیم

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2 \rightarrow H\psi = E_n \psi \rightarrow \psi_n(x) = \dots H_n(\xi) e^{-\xi^2/2} \quad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$$

$$E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$[a, a^\dagger] = 1$$

$$H = (a^\dagger a + \frac{1}{2}) \hbar \omega \quad ; \quad a^\dagger a = N: \text{ number operator}$$

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \quad H|n\rangle = E_n|n\rangle$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \rightarrow (a^\dagger)^n|0\rangle = \sqrt{n!}|n\rangle$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \rightarrow a|0\rangle = 0$$

Zero-point energy
 $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$

N نوسانگر هارمونیک ساده غیر کوپل شده داریم: $H_1, H_2, \dots, H_N$

a_k : یک کوانتای انرژی در نوسانگر k ازم نابودی کند.

$a_k^\dagger$: یک کوانتای انرژی در نوسانگر k ازم ایجاد کند.

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_q] = [a_k^\dagger, a_q^\dagger] = 0, \quad [a_k, a_q^\dagger] = \delta_{kq}$$

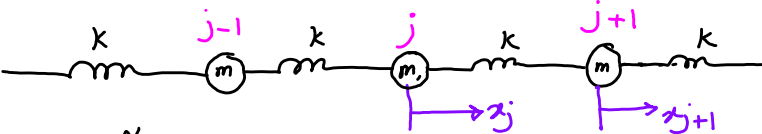
$$H = \sum_{k=1}^N (a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2}) \hbar \omega_k$$

$$a_k|0\rangle = 0 \quad ; \quad |0, 0, \dots, 0\rangle = |0\rangle \text{ حالت خنثی}$$

$$|n_1, n_2, \dots, n_N\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2} \dots (a_N^\dagger)^{n_N}}{\sqrt{n_1! n_2! \dots n_N!}} |0, 0, \dots, 0\rangle$$

$$\{|n_k\rangle\} = \prod_k \frac{1}{\sqrt{n_k!}} (a_k^\dagger)^{n_k} |0\rangle$$

n_1 کوانتای انرژی در نوسانگر اول،
 n_2 " " " " " "
 $\vdots$
 n_N " " " " " "



$$H = \sum_{j=1}^N \frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2} k (x_{j+1} - x_j)^2$$

فونون: N اتم داریم. همدیگر را به هم وصل کرده اند. m جرم اتمی و a فاصله بین اتم ها.

$\vec{r}$: سیستم جرم ز ازم

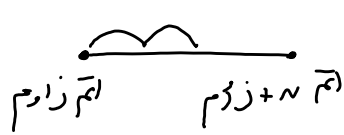
$\vec{r}_j = \vec{r}_0 + j a \hat{x}$: مکان اتم j ازم

اجزای اتمی در فضای واقعی و در فضای داریون غیر کوپل شده اند.

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \tilde{x}_k e^{ikja} \quad \text{و} \quad \tilde{x}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j x_j e^{-ikja}$$

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx/\hbar} \psi(x) dx$$

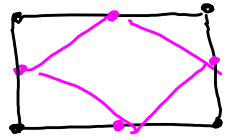
شرط دوری: $e^{ikja} = e^{ik(j+N)a} = e^{ikja} e^{ikNa}$



$$\Rightarrow e^{ikNa} = 1 \Rightarrow kNa = 2\pi m \rightarrow \text{integer}$$

$$\Rightarrow k = \frac{2\pi m}{Na} ; -\frac{N}{2} < m < \frac{N}{2}$$

$$\sum_j e^{ikja} = N \delta_{k,0}$$



$$[x_j, p_{j'}] = i\hbar \delta_{jj'}$$

$$[\tilde{x}_k, \tilde{p}_{k'}] = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j \sum_{j'} e^{-ikja} e^{-ik'j'a} [x_j, p_{j'}] = \frac{i\hbar}{N} \sum_j e^{-ikja - ik'j'a}$$

$$= \frac{i\hbar}{N} \sum_j e^{-ija(k+k')} = \frac{i\hbar}{N} N \delta_{k+k',0} = i\hbar \delta_{k,-k'}$$

$k+k'=0$
 $k=-k'$

$$\sum_j p_j^2 = \sum_j p_j p_j = \sum_j \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \tilde{p}_k e^{ikja} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k'} \tilde{p}_{k'} e^{ik'ja}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j,k,k'} \tilde{p}_k \tilde{p}_{k'} e^{i(k+k')ja} = \frac{1}{N} \sum_{k,k'} \tilde{p}_k \tilde{p}_{k'} \sum_j e^{i(k+k')ja} = \sum_k \tilde{p}_k \tilde{p}_{-k}$$

$$\sum_j (x_{j+1} - x_j)^2 = \sum_j \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_k \tilde{x}_k e^{ik(j+1)a} - \sum_k \tilde{x}_k e^{ikja} \right)$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{k'} \tilde{x}_{k'} e^{ik'(j+1)a} - \sum_{k'} \tilde{x}_{k'} e^{ik'ja} \right)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j,k,k'} \tilde{x}_k \tilde{x}_{k'} e^{ik(j+1)a} e^{ik'(j+1)a} + \tilde{x}_k \tilde{x}_{k'} e^{ikja} e^{ik'ja} - \tilde{x}_k \tilde{x}_{k'} e^{ikja} e^{ik'(j+1)a} - \tilde{x}_k \tilde{x}_{k'} e^{ik(j+1)a} e^{-ik'ja}$$

$$p_{tot}^2 = \sum_{k,k'} \tilde{x}_k \tilde{x}_{k'} \sum_j e^{ija(k+k')} = N \sum_k \tilde{x}_k \tilde{x}_{-k} \xrightarrow{\text{دوری}} N \sum_k \tilde{x}_k \tilde{x}_{-k}$$

$$\Rightarrow \sum_j (x_{j+1} - x_j)^2 = 2 \sum_k \tilde{x}_k \tilde{x}_{-k} \frac{1}{N} \sum_{k,k'} \tilde{x}_k \tilde{x}_{k'} \sum_j e^{ija(k+k')} e^{ik'a} + \dots$$

$$= \sum_k \tilde{x}_k \tilde{x}_{-k} \left\{ 2 - e^{-ika} - e^{+ika} \right\} = 2 \sum_k \tilde{x}_k \tilde{x}_{-k} (1 - \cos ka) = 4 \sum_k \tilde{x}_k \tilde{x}_{-k} \frac{\sin^2 \frac{ka}{2}}{2}$$

$$H = \frac{1}{2m} \sum_k \tilde{p}_k \tilde{p}_{-k} + \frac{1}{2} N \sum_k 4 \tilde{x}_k \tilde{x}_{-k} \sin^2 \frac{ka}{2}$$

$$\omega_k^2 \equiv \frac{4k^2}{m} \sin^2 \frac{ka}{2}$$

$$H = \frac{1}{2m} \sum_k (p_k p_{-k} + \frac{1}{2} m \omega_k^2 x_k x_{-k})$$

فناوری غیر کوانتوم شده: $H = \sum_k \frac{1}{2m} p_k^2 + \frac{1}{2} m \omega_k^2 x_k^2$

$$a_k = \sqrt{\frac{m\omega_k}{2}} \left(x_k + \frac{i}{m\omega_k} p_k \right), \quad a_k^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega_k}{2}} \left(x_k - \frac{i}{m\omega_k} p_k \right)$$

$$H = \sum_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_k$$

$$\Rightarrow x_k = \dots a, a^\dagger, \quad p_k = \dots a, a^\dagger$$

$$p_k^\dagger = p_{-k}, \quad [x_k, p_{k'}^\dagger] = i\hbar \delta_{k, k'}$$

$$x_k^\dagger = x_{-k}, \quad [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0$$

$$[a_k, a_{k'}] = 0$$

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{k, k'}$$

$$a_k a_k^\dagger - a_k^\dagger a_k = 1$$

$$H = \sum_k \frac{\hbar \omega_k}{2} (a_k a_k^\dagger + a_k^\dagger a_k)$$

$$1 + a_k^\dagger a_k$$

$$H = \sum_k \hbar \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right)$$

مجموعی انرژی فوتونی

$$E_k = \left(n_k + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_k$$

انرژی مدی فوتونی

انرژی ضربه صاف از $\hbar \omega_k$ است

مسائل ۲.۲ و ۲.۴ را حل کنید

این توده‌های انرژی شبیه به ذرات هستند. پس می‌توان به فوتونها به صورت ذره نگاه کرد.

$$|n_1, n_2, \dots, n_N\rangle$$

نظم: occupation number representation

در حالت عادی انتخاب استفاده از ذره‌ای داریم. (اگر می‌خواهیم حالت را به جیبی کنیم می‌توانیم تعداد ذرات یکسان در هر حالت کوانتومی را بنویسیم)

۱۲ از تاج مسیح خلاص می‌شویم و آن را با مجموعه‌ای از ابرهای خنک و فضا جایگزین می‌کنیم.

ذره در جیب

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E \psi \quad \begin{cases} \sin kx, \cos kx & \psi(0) = \psi(l) = 0 \\ e^{ikx}, e^{-ikx} \end{cases}$$

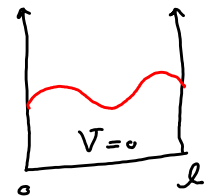
$$p = \hbar k, \quad \hbar = 1 \Rightarrow k = p$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} e^{ipx}$$

$$\hat{p} \psi(x) = -i \frac{d}{dx} \psi(x) = \underbrace{(-i)(ip)}_p \psi(x)$$

$$\hat{p} = -i \frac{d}{dx}$$

$$\Rightarrow \hat{p} \psi(x) = p \psi(x)$$



در نتیجه تاج مسیح هم هست

$$\text{شرط مرزی: } \psi(x) = \psi(x+l) \Rightarrow e^{ipx} = e^{ip(x+l)} \Rightarrow e^{ip l} = 1 \Rightarrow p l = 2\pi m$$

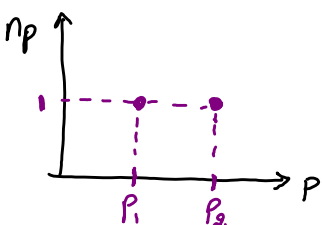
$$\Rightarrow p_m = \frac{2\pi m}{l}$$

$$\text{حالت دوجزئی: } |p_1, p_2\rangle$$

هدف: ساخت سیستم از ذره‌ای. یک ذره دیگر را در جیب می‌کنیم (بزرگ)

یک ذره در سیستم p_1 و ذره دیگر در سیستم p_2

$$[H, \hat{p}] = 0, \quad H = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad \begin{matrix} \text{در جهت دیگر} \\ \hat{p}, H \end{matrix} \quad |p_1, p_2\rangle$$



$$\hat{p} |p_1, p_2\rangle = (p_1 + p_2) |p_1, p_2\rangle$$

$$\hat{H} |p_1, p_2\rangle = (E_{p_1} + E_{p_2}) |p_1, p_2\rangle$$

فرض کنید که دو ذره در انرژی E_{p_3} وجود داشته باشند، انرژی سیستم: $2E_{p_3}$

$$\text{انرژی کل} = \sum p_m E_{p_m}$$

تعداد ذرات در حالت $|p_m\rangle$

تغییر نوسون

ذره A و B و C را در نظر بگیرید

$$|ABC\rangle = |p_1 p_1 p_2\rangle$$

ترتیب یکسان بودن ذرات را وارد می کنیم؛ چنانچه هر حالت منقسم را انفعال کرده اند.

برای مثال ما: ۳ ذره در حالت p_1 و یک ذره در حالت p_2 است.

$$|2100\dots\rangle$$

حالت n ذره ای داشته باشیم: n_1 ذره در حالت p_1 و n_2 ذره در حالت p_2 و ... هستند:

$$|n_1, n_2, \dots\rangle$$

occupation number rep.

$$(3) \rightarrow p_1 = \frac{2\pi}{L} \quad p_2 = \frac{4\pi}{L} \quad (m=1) \quad (m=2)$$

در نوسون قدیم: این ذره یا در منقسم p_1 است یا در منقسم p_2

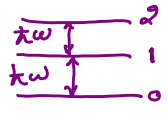
ذرات	قدیم (کوانتومی)	جدید
0	0	100
1	$ p_1\rangle$	110
1	$ p_2\rangle$	101
2	$ p_1 p_1\rangle$	120
2	$ p_2 p_2\rangle$	102
2	$ p_1 p_2\rangle$	111
3	$ p_1 p_1 p_1\rangle$	130
3	$ p_1 p_2 p_1\rangle$	121
:	:	:

$$H|n_1, n_2, \dots\rangle = \left[\sum p_m \epsilon_{p_m} \right] |n_1, n_2, \dots\rangle$$

$$\epsilon_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega \rightarrow \epsilon_0 = 0 \rightarrow \epsilon = n \hbar \omega$$

اگر دو کوانتای انرژی در سطح داشته باشیم، انرژی در برابر انرژی یک کوانتای انرژی است.



نوسانگرها نصف ماده داشته باشیم که n_k تایی آنها دارای انرژی $\hbar \omega_k$ باشد، انرژی کل سیستم: نوسانگر k ژم دارای n_k کوانتای انرژی است.

$$\epsilon = \sum_{k=1}^N n_k \hbar \omega_k \quad (II)$$

(I): حالت منقسم $|p_m\rangle$ دارای n_{p_m} ذره است و هر ذره انرژی ϵ_{p_m} و منقسم p_m دارد.

نوسانگرها نصف ماده

ذرات یکسان

کوانتا در نوسانرها

ذرات در حالتی منقسم

نوسانگر k ژم

m ژم منقسم حالت منقسم

$$\epsilon = \sum_{k=1}^N n_k \hbar \omega_k$$

$$\epsilon = \sum_{m=1}^N n_{p_m} \epsilon_{p_m}$$

جابجایی بر حسب حالت با اپراتورها

اپراتورها به جای برادرهای حالت، انرژی را توضیح می دهند. تنها حالت خلا را نمی داریم: 10

$$|n_1 n_2 n_3 \dots\rangle = \prod_k \frac{(a_k^\dagger)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} |0\rangle$$

مثال: حالت با یک کوانتای انرژی در نوسانگر دوم و یک کوانتای انرژی در نوسانگر دوم ایی دارند:

$$|210\dots0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}} (a_1^\dagger)^2 \frac{1}{\sqrt{1!}} (a_2^\dagger) |0\rangle$$

با تعبیر جدید: ذرات با مشخصه خاص تولید می شوند.

$$k \rightarrow p_m$$

$a_{p_m}^\dagger$: یک ذره در حالت منقسم p_m ایجاد می شود.

ایں توحیدِ الٰہی کہ نورِ افرہا را توحیدِ حق می دهند تبدیل به (پس) افرہای می شوند کہ ذرات در حالت های نسبی را توحیدِ حق می دهند

* نکته: این کار اصول تعارفی را بنیاد به هم می‌زند ← ذرات بعد از این: تابع معیج تحت جابلیت دو ذره تغییر نمی‌کنند.

✓ " فرمیں : " " " " " کی علامت منی کی لکیر۔

تحریر مانڈی بہار و تقاریر

occupation number rep. : $|n_1 n_2\rangle$

$$\sigma_p^+ 107 = 1107$$
$$a_{p_2}^+ 10\gamma = 101\gamma$$

$$a_{p_1}^\dagger a_{p_2}^\dagger = \lambda a_{p_2}^\dagger a_{p_1}^\dagger \quad \Leftarrow$$

$$\alpha^t_{p_2} \alpha^t_{p_1} |0\rangle \propto |11\rangle$$

$$a_{P_1}^+ a_{P_2}^+ |0\rangle \propto |11\rangle$$

فرضی : $\lambda = -1$ لغزونی : $\lambda = +1$

Basins

$$a_{p_2}^+ a_{p_1}^+ = a_{p_1}^+ a_{p_2}^+ \rightarrow [a_i^+, a_j^+] = 0$$

بہمین صورت : $[a_i, a_j] = 0$

تعریف می‌کنیم: $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = \prod_m \frac{1}{\sqrt{n_{p_m}!}} (a_{p_m}^\dagger)^{n_{p_m}} |0\rangle$$

یک زنجیره در حالت متناهی p_i $\rightarrow$ $a_i^+ |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1} |n_1, \dots, n_i + 1, \dots\rangle$: در حالت نامتناهی

$\sigma_j |n_1 \dots n_j \dots\rangle = \sqrt{n_j} |n_1 \dots n_{j-1} \dots\rangle \rightarrow$ کتب زره درجات مختصی
 جو (زنجیر) رفتہ است۔

$$\lambda = -1 : \underline{\text{Fermions}}$$

$$\textcircled{4} \quad C_{p_2}^+ C_{p_1}^+ = -C_{p_1}^+ C_{p_2}^+ \rightarrow C_i^+ C_j^+ = -C_j^+ C_i^+ \Rightarrow \{C_i^+, C_j^+\} = 0$$

بہمیں صریح: $\{C_i, C_j\} = 0$

$$c_i^\dagger c_j^\dagger |0\rangle = -c_j^\dagger c_i^\dagger |0\rangle$$

مقرفی نسیم : $\{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{ij}$

سداد کفایتی انرژی در حالت ۱۸۶

$$\hat{N} \ln \gamma = \overline{n \ln \gamma}$$

عجب کہنم کسر دلچہ مادرہا بجزی ربی فرمودہا درست کاری نند ماینہ!

مثال: دوزده درستی در حالت زار و نظر میسریم: $n_j = C_i + C_j$: این عدد تعداد

کمی زود در حالت : $|11\rangle = ?$
 فکری P است -
 چند زود در حالت P

$$|11\rangle = c_1^\dagger c_2^\dagger |0\rangle$$

$$n_1 |11\rangle = c_1^\dagger c_1 |11\rangle = c_1^\dagger c_1 \underbrace{c_1^\dagger c_2^\dagger}_{\{c_1, c_1^\dagger\} = 1 \rightarrow 1 - c_1^\dagger c_1} |10\rangle = (c_1^\dagger c_2^\dagger - c_1^\dagger \underbrace{c_1^\dagger c_1}_{\{c_1, c_2^\dagger\} = 0 \rightarrow -c_2^\dagger c_1}) |10\rangle$$

$$= c_1^\dagger c_2^\dagger |0\rangle + (c_1^\dagger)^2 c_2^\dagger c_1 |0\rangle = c_1^\dagger c_2^\dagger |0\rangle = |11\rangle \quad \checkmark$$

رابطه: $c_i^\dagger |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle = (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} n_j} \sqrt{n_i+1} |n_1, \dots, n_i+1, \dots\rangle$

$$c_i |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle = (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} n_j} \sqrt{n_i} |n_1, \dots, n_i-1, \dots\rangle$$

$$(-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} n_j} = (-1)^{n_1 + \dots + n_{i-1}}$$