در این فصل میدانهای اسکالر و اسپینوری را با روش انتگرال مسیر گوارش می دهیم که با استفاده از آن می توانیم انتشارگر میدانهای اسپینوری و اسکالر را بدست آوریم. سپس برهم کنش ها را معرفی می کنیم و با روش اختلال، توابع تامین را بدست می آوریم.

Generating functional for scalar fields

در فصل قبل، یادگرفتیم که دامنه گذار خلأ به خلأ در حضور source به صورت زیر داده می شود:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}q \exp\left\{ \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \left(\mathcal{L} + \hbar J q + \frac{i}{2}\epsilon q^2\right)\right\} \propto \langle 0,\infty | 0,-\infty\rangle^J$$

در فصل قبل، از t_i تا t_f را به $n+1$ قسمت مساوی تقسیم کردیم و هر کدام از این فواصل را ϵ می نامیدیم و انتگرال روی q گرفته می شد که تابعی از t بود و سپس در حد پیوسته $q(t)$ را داشتیم.

در شباهت با رابطه بالا، می توانیم دامنه گذار خلأ به خلأ را به صورت زیر تعریف کنیم: $(\hbar = 1)$

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp\left[i\int d^4x \left[\mathcal{L}(\phi) + J(x)\phi(x) + \frac{i}{2}\epsilon\phi^2\right]\right\} \propto \langle 0,\infty | 0,-\infty\rangle^J$$

در این قسمت، ما باید زمان و مکان را گسسته کنیم. پس داریم:

$$t \longrightarrow \delta^4 \qquad \prod_{i=1}^{n} dq(t_i) \longrightarrow \prod_{n=1}^{n} d\phi(n)$$

$$q(t) \longrightarrow \phi(x^\mu) \qquad \underbrace{(i,j,k,l)}\longrightarrow n$$

$$\mathcal{D}q(t) \longrightarrow \mathcal{D}\phi(x^\mu)$$

هر کدام از این اندیس ها از ۱ تا N مقدار می گیرند.

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{i,j,k,l} = \frac{1}{\delta}\left[\phi(x_i+\delta, y_j, z_k, t_l) - \phi(x_i, y_j, z_k, t_l)\right]$$

$$\longrightarrow \mathcal{L}\left(\phi(x_i, y_j, z_k, t_l), \partial_\mu\phi(x_i, y_j, z_k, t_l)\right) = \mathcal{L}(\phi(n), \partial_\mu\phi) = \mathcal{L}_n$$

$$\longrightarrow S = \int \mathcal{L}\, d^4x \longrightarrow S = \prod_{i=1}^{N^4} \delta^4 \mathcal{L}_n$$

پس با توجه به این روابط برای دامنه گذار خلأ به خلأ داریم:

$$Z[J] = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N^4} d\phi_n \exp\left\{ i\sum_{n=1}^{N^4} \delta^4\left[\mathcal{L}_n + \phi_n J_n + \frac{i}{2}\epsilon\phi_n^2\right]\right\}$$

حال لاگرانژی K.G را قرار می دهیم:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^2\right]$$

$$\longrightarrow \underbrace{Z_0[J]}_{\text{free particle field}} = \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{ i\underbrace{\int d^4x\left[\frac{1}{2}\left((\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - (m^2 - i\epsilon)\phi^2\right) + J\phi\right]}_{I}\right. \quad ۳$$

داریم: $$\int \partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi = \int \underbrace{\partial_\mu(\phi\,\partial^\mu\phi)\, d^4x}_{0} - \int \phi\,\underbrace{\partial_\mu\partial^\mu}_{\Box}\phi\, d^4x \;\; *$$

با تضمین گاوس، این انتگرال را روی سطح می بریم که صفر می شود. $$\longrightarrow I = -i\int d^4x\left[\frac{1}{2}\phi(\Box + m^2 - i\epsilon)\phi - \phi J\right]$$

برای محاسبه تغییر متغیری دهیم : $\varphi \to \varphi + \varphi_0$

$$\Rightarrow I = -i\int d^4x\left[\frac12 \varphi O\varphi + \underbrace{\frac12 \varphi O\varphi_0 + \frac12\varphi_0 O\varphi}_{\text{ثابت می‌کنیم این دو جمله برابرند}} + \frac12 \varphi_0 O\varphi_0 - J(\varphi+\varphi_0)\right]$$

$$\int \varphi\Box\varphi_0\, d^4x = \int \varphi\,\partial_\mu\partial^\mu\varphi_0\, d^4x = \int \cancel{\partial_\mu(\varphi\,\partial^\mu\varphi_0)}\, d^4x - \int \partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi_0\, d^4x$$

از رابطه * استفاده می‌کنیم.

$$\overset{*\ \text{از رابطه}}{=} -\int \cancel{\partial_\mu(\varphi_0\,\partial^\mu\varphi)}\, d^4x + \int(\partial_\mu\partial^\mu\varphi)\,\varphi_0\, d^4x = \int(\Box\varphi)\,\varphi_0\, d^4x \quad ✓$$

φ_0 را در خیال انتخاب می‌کنیم که ① $O\varphi_0 = J$

$$\Rightarrow I = -i\int d^4x\left[\frac12\varphi O\varphi + \underbrace{\varphi \cancel{O\varphi_0}^{J} + \frac12\varphi_0 \overset{J}{O\varphi_0} - \cancel{J\varphi}}_{\frac12\varphi O\varphi - \frac12 J\varphi_0} - J\varphi_0\right]$$

$$\Rightarrow Z_0[J] = e^{\frac{i}{2}\int J(x)\,\varphi_0(x)\,d^4x}\underbrace{\int \mathcal{D}\varphi\, e^{-i\int d^4x\, \frac12\varphi O\varphi}}_{\sim}$$

① : $(\Box + m^2 - i\epsilon)\varphi_0(x) = J(x) \Rightarrow \varphi_0(x) = -\int \underbrace{D_F(x-y)}_{\text{انتشارگر فاینمن که همان تابع گرین است}} J(y)\,d^4y$

$(\Box_x + m^2 - i\epsilon)D_F(x-y) = -\delta^4(x-y)$: ② انتشارگر فاینمن که همان تابع گرین است

$$\Rightarrow Z_0[J] = \sim e^{-\frac{i}{2}\int d^4x\, J(x)\int D_F(x-y)\,J(y)\,d^4y} \quad ③$$

یافتن $D_F(x-y)$

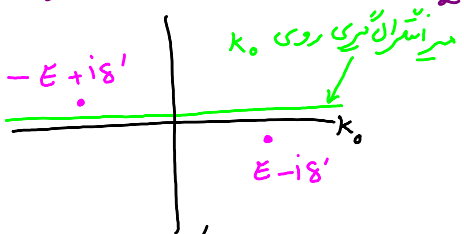
$$D_F(x) = \int A(k)\,e^{-ikx}\,d^4k \Rightarrow (\Box_x + m^2 - i\epsilon)D_F(x) = \int A(k)\underbrace{(\Box_x+m^2-i\epsilon)\,e^{-ikx}}_{(-k^2+m^2-i\epsilon)\,e^{-ikx}}d^4k \underset{②}{=} -\delta^4(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ikx}\,d^4k$$

$$\Rightarrow A(k) = \frac{1}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon} \Rightarrow D_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{-ikx}}{\underbrace{k^2-m^2+i\epsilon}_{\text{تکین است.}}}\,d^4k$$

$$k^2-m^2+i\epsilon=0 \Rightarrow k_0^2 - \vec k^2 - m^2 + i\epsilon = 0$$

$$\Rightarrow k_0 = \pm\sqrt{\vec k^2+m^2-i\epsilon} = \pm\sqrt{\vec k^2+m^2\Big(1-\underbrace{\frac{i\epsilon}{\vec k^2+m^2}}_{i\delta}\Big)} = \mp\sqrt{\vec k^2+m^2}\,\underbrace{\sqrt{1-i\delta}}_{\simeq 1-i\delta/2} = \mp\Big\{\underbrace{\sqrt{\vec k^2+m^2}}_{E} - \overbrace{\frac{i\epsilon}{2\sqrt{\vec k^2+m^2}}}^{i\delta'}\Big\}$$

$$\Rightarrow k_0 = \mp(E - i\delta') = \begin{cases}E-i\delta' \\ -E+i\delta'\end{cases}$$



یک روش دیگر این است که محور زمان را فقط در تصور بگیریم. یعنی یک wick rotation داشته باشیم : $t \to t e^{-i\delta}$, $\delta = \pi/2$

$$\Downarrow$$

$$t \to -it \Rightarrow x^\mu = (\vec x, it) \Rightarrow dx^2 = d\vec x^2 + dx_4^2 = d\vec x^2 - dt^2$$

$$x_4 = it \Rightarrow t = -ix_4$$

در این حالت:

$$d^4x = dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = -i\, dx_4\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = i\, d^4x_E$$

$$k_4 = -ik_0 \Longrightarrow k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 = -k_4^2 - \vec{k}^2 = -k_E^2 \longrightarrow d^4k = dk_0 \cdots dk_3 = i\, dk_1 \cdots dk_4 = i\, d^4k_E$$

$$k\cdot x = k_0 x_0 - \vec{k}\cdot\vec{x} = (ik_4)(-ix_4) - \vec{k}\cdot\vec{x} = k_4 x_4 - \vec{k}\cdot\vec{x}$$

پس به این ترتیب در فضای اقلیدسی داریم:

$$D_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{\overset{i\,d^4k_E}{d^4k}\; e^{\overset{-ik_E x}{-ikx}}}{\underset{-k_E^2}{k^2} - m^2} = \frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k_E\, \frac{e^{-ik_E x}}{\underline{k_E^2 + m^2}}$$

$$k_E^2 + m^2 = 0 \Longrightarrow k_4^2 + \vec{k}^2 + m^2 = 0 \longrightarrow k_4 = \mp i\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

واضح است که روی محور حقیقی تکینگی وجود ندارد.

کنش را نیز باید در مختصات اقلیدسی بنویسیم:

$$\partial_\mu\varphi\, \partial^\mu\varphi = (\partial_0\varphi)^2 - (\vec{\nabla}\varphi)^2 = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_4}\right)^2 - (\vec{\nabla}\varphi)^2$$

$$= -(\partial^\mu_E\varphi\, \partial_{\mu E}\varphi)$$

$$\Longrightarrow Z_E[J] = \int \mathcal{D}\varphi\; e^{i\int(-i\,d^4x_E)\left\{-\frac{1}{2}(\partial_E\varphi)^2 - m^2\varphi^2 + J\varphi\right\}} = \int \mathcal{D}\varphi\; e^{-\int\left\{\frac{1}{2}(\partial_E\varphi)^2 + m^2\varphi^2 - J\varphi\right\} d^4x_E}$$

که exp منفی است پس انتگرال همگراست. نقش ϵ در رابطه 6.3 نیز همین همگرا کردن انتگرال است.

functional integration

اکنون از انتگرال گاوسی عادی استفاده می‌کنیم و آن را برای تعداد متناهی از متغیرها تعمیم می‌دهیم.

داریم: $\displaystyle\int e^{-ax^2/2}\, dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \longrightarrow \int e^{-\frac{1}{2}\sum_n a_n x_n^2}\, dx_1 \cdots dx_n = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\prod_{i=1}^{n} a_i^{1/2}}$ $\quad I$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, \cdots, x_n) \longrightarrow \sum_n a_n x_n^2 = \underset{(x,\, Ax)}{\underset{\parallel}{x^T A x}}, \quad \det A = a_1 a_2 \cdots a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

$$\Longrightarrow I = \int e^{-\frac{1}{2}x^T A x}\, dx_1 \cdots dx_n = \frac{(2\pi)^{n/2}}{|\det A|^{1/2}}$$

این measure را تعریف می‌کنیم:

$$dx \equiv d^n x\, (2\pi)^{-n/2}$$

$$\longrightarrow I = \int e^{-\frac{1}{2}x^T A x}\, dx = (\det A)^{-1/2} \quad *$$

می‌توانیم حالت بالا را تعمیم دهیم و این چند جمله‌ای را داشته باشیم:

$$Q(x) = \underbrace{\tfrac{1}{2}(x, Ax)}_{\text{درجه دوم}} + \underbrace{(b, x)}_{\text{درجه اول}} + c \longrightarrow \text{ثابت} \qquad \longrightarrow \int e^{-Q(x)}\, dx = ?$$

ابتدا مینیمم Q را پیدا می‌کنیم:

$$Q(x_1, \cdots, x_n) = \tfrac{1}{2} x_i A_{ij} x_j + b_i x_i + c \longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x_k} = A_{kj} x_j + b_k = 0$$

$$\Longrightarrow A\bar{x} + b = 0 \longrightarrow \bar{x} = -A^{-1}b$$

حال بسط Q را حول نقطه min می‌نویسیم:

$$Q(x_1, \cdots, x_n) = Q(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n) + \underbrace{\cancel{\sum_k \left.\frac{\partial Q}{\partial x_k}\right|_{x=\bar{x}} (x_k - \bar{x}_k)}}_{0} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \underbrace{\left.\frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{x=\bar{x}}}_{A_{ij}} (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) + \underbrace{\cancel{\cdots}}_{0}$$

$$\rightarrow Q(x) = Q(\bar{x}) + \tfrac{1}{2}(x_i-\bar{x}_i)\,A_{ij}\,(x_j-\bar{x}_j) = \underbrace{Q(\bar{x})}_{?} + \tfrac{1}{2}\big((x-\bar{x}),\,A(x-\bar{x})\big)$$

$$Q(\bar{x}) = \tfrac{1}{2}(\bar{x},\underbrace{A\bar{x}}_{-b}) + (b,\bar{x}) + C = -\tfrac{1}{2}\underbrace{(\bar{x},b)}_{\frac{1}{2}(\bar{x},b)=-\frac{1}{2}(A^{-1}b,b)} + (b,\bar{x}) + C$$

$$\Rightarrow \int e^{-Q(x)}(dx) = \underbrace{e^{\frac{1}{2}(A^{-1}b,b)-C}}_{\alpha}\int e^{-\frac{1}{2}(x-\bar{x},\,A(x-\bar{x}))}(dx) \underset{x-\bar{x}=y}{=} \alpha\underbrace{\int e^{-\frac{1}{2}(y,\,Ay)}(dy)}_{*\text{از}\ =\ (\det A)^{-1/2}} \qquad *'$$

حال اگر انتگرال گاوسی را تعمیم بدهیم، داریم:

$$\int e^{-\frac{1}{2}a(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \frac{2\pi}{a}$$

$$\begin{aligned} z &= x+iy \\ z^* &= x-iy \end{aligned} \;\rightarrow\; J(z^*,z\,|\,x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial z^*}{\partial x} & \frac{\partial z^*}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -i \\ 1 & +i \end{vmatrix} = 2i \;\Rightarrow\; dz^*dz = (2i)\,dx\,dy$$

$$\rightarrow \int e^{-\frac{1}{2}a\underbrace{(x^2+y^2)}_{zz^*}}dx\,dy = \int e^{-\frac{1}{2}azz^*}\frac{dz\,dz^*}{2i} = \frac{2\pi}{a}$$

$$(dz) \equiv \frac{dz}{\sqrt{2\pi i}}\;,\quad (dz^*) \equiv \frac{dz^*}{\sqrt{+2\pi i}} \qquad \rightarrow \int e^{-\frac{1}{2}azz^*}\underbrace{\frac{dz}{\sqrt{2\pi i}}}_{(dz)}\,\underbrace{\frac{dz^*}{\sqrt{2\pi i}}}_{(dz^*)} = \frac{2}{a} \qquad \tfrac{1}{2}a = a'$$

$$\rightarrow \int e^{-(z^*,Az)}(dz)(dz^*) = (\det A)^{-1} \quad **$$

از مقایسه این رابطه و رابطه * متوجه می‌شویم که اگر با موجودات حقیقی سروکار داشتیم، توان $|A|$ برابر $-\frac{1}{2}$ است و اگر با موجودات موهومی کار می‌کنیم، این توان برابر (-1) است.

حال روابط بالا را به فضای بی‌نهایت بعدی توابع تعمیم می‌دهیم:

برای ضرب داخلی داشتیم: $(a,b) = a_i b_i \longrightarrow \int a(x)\,b(x)\,dx$

$$(a,Ab) = a_i A_{ij} b_j \longrightarrow \int a(x)\,A(x,y)\,b(y)\,dx\,dy$$

پس برای تعمیم رابطه * داریم:

$$\int e^{-\frac{1}{2}\int \varphi(x)\,A(x,y)\,\varphi(y)\,dx\,dy}\,\mathcal{D}\varphi = (\det A)^{-1/2}$$

حال اگر میدان مختلط داشته باشیم، از رابطه ** تعمیم را انجام می‌دهیم:

$$\int e^{-\int \varphi^*(x)\,A(x)\,\varphi(x)\,dx}\,\mathcal{D}\varphi\,\mathcal{D}\varphi^* = (\det A)^{-1} \quad ⑤$$

با این روش بالا، می‌توانیم رابطه ④ را از رابطه ③ بدست آوریم:

رابطه ③ : $Z_0[J] = \int \mathcal{D}\varphi\; e^{-i\int\left[\frac{1}{2}\varphi(x)\,(\Box+m^2-i\epsilon)\,\varphi(x) - J\varphi\right]d^4x}$

$$A = -i\,(\Box+m^2-i\epsilon)\;,\quad b=-iJ\;,\quad C=0$$

از رابطه *' استفاده می‌کنیم: از رابطه ⑤ جایگذاری می‌شود

$$\rightarrow Z_0[J] = \exp\left[\tfrac{1}{2}\left(-iJ\,,\,-i(\Box+m^2-i\epsilon)^{-1}(-iJ)\right)\right]\left[\det\left(i(\Box+m^2-i\epsilon)\right)\right]^{-1}$$

جمله exp را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$\exp\left[\frac{i}{2}\int J(x)\left[\Box+m^2-i\epsilon\right]^{-1}_{x,y} J(y)\,dx\,dy\right] \quad \checkmark$$

(از بالا داشتیم : $-D_F(x-y)$)

حال می‌توان exp را بسط داد و دیاگرام های فاینمن را بدست آورد:

$$Z_0[J]=N\left\{1-\frac{i}{2}\int J(x)\,D_F(x-y)\,J(y)\,dx\,dy+\frac{1}{2!}\left(\frac{i}{2}\right)^2\left[\int J(x)\,D_F(x-y)\,J(y)\,dx\,dy\right]^2+\cdots\right\}$$

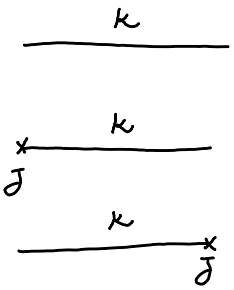
معمولاً دیاگرام‌های فاینمن در فضای تکانه رسم می‌شود پس یک تبدیل فوریه برای $J(x)$ می‌زنیم:

$$J(x)=\int J(p)\,e^{-ipx}\,d^4p$$

$$\Rightarrow -\frac{i}{2}\int J(x)\,D_F(x-y)\,J(y)\,d^4x\,d^4y=-\frac{i}{2}\int J(p_1)\,e^{-ip_1x}\,dp_1\,\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2-m^2+i\epsilon}\,dk\int J(p_2)\,e^{-ip_2y}\,dp_2\,d^4x\,d^4y$$

$$=-\frac{i}{2}\int J(p_1)\,\frac{dp_1\,dp_2}{\cancel{(2\pi)^4}}\,\frac{J(p_2)}{k^2-m^2+i\epsilon}\underbrace{\int e^{-i(p_1+k)x}\,d^4x}_{\cancel{(2\pi)^4}\,\delta^4(p_1+k)}\underbrace{\int e^{-i(p_2-k)y}\,d^4y}_{(2\pi)^4\,\delta^4(p_2-k)}=(2\pi)^4\int\frac{J(-k)\,J(k)}{k^2-m^2+i\epsilon}\,d^4k\times\frac{-i}{2}$$

حال این قوانین را در نظر می‌گیریم:



$$\frac{1}{(2\pi)^4}\quad\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}$$

$$i\,(2\pi)^4\,J(k)$$

$$i\,(2\pi)^4\,J(-k)$$

به این ترتیب جمله‌ای که در بالا بدست آوردیم به صورت دیاگرامی به شکل مقابل است:

$\frac{1}{2}$ 

توضیح در مورد انتشارگر:

$$k^2-m^2=p^2-m^2=\underbrace{p_0^2}_{(m+T)^2}-\vec{p}^{\,2}-m^2=2mT+T^2-\vec{p}^{\,2}$$

$$=T(2m+T)-\vec{p}^{\,2}$$

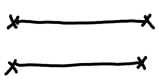
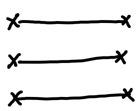
انرژی جنبشی

در حد $v\ll c$ (غیر نسبیتی) داریم $T\ll m$ پس:

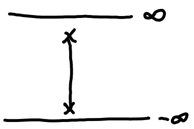
$$p^2-m^2=2mT-\vec{p}^{\,2}=2m\left(T-\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\right)$$

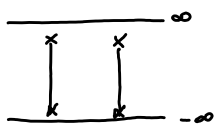
این رابطه دقیقاً رابطه 5.45 است. پس انتشارگری که نوشتیم، انتشارگر ذره آزاد است.

پس بقیه جملات را هم می‌توان نوشت:

$Z_0[J]=1+\frac{1}{2}$  $+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2$  $+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3$  $+\cdots$

توجه کنید که چون برهم‌کنش وجود ندارد، خطوط انتشارگر، یکدیگر را قطع نمی‌کنند:

$Z_0[J]=1+\frac{1}{2}$ 

$+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2$ 

$+\cdots$