جلسه نهم : روش گاوس ← توابع لژاندر

Note Title ۱۳۹۷/۰۲/۱۹

روش های جبری تیلور : $f(x) \simeq P_{N-1}(x)$

روش گاوس : $f(x) \simeq P_{2N-1}(x)$

وزن

$$\longrightarrow \int f(x)\,dx \simeq \int P_{2N-1}(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1} P_{2N-1}(x_i)\, w_i$$

x_i ها = صفرهای چندجمله‌ای های مرتبه N هستند.

نقاط تکین : $x = \mp 1$

معادله لژاندر وابسته : $\boxed{(1-x^2)} \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right] + \{C(1-x^2) - m_\ell\} P = 0 \longrightarrow$ توابع لژاندر وابسته (P)

اگر $m_\ell = 0 \longrightarrow$ معادله لژاندر $\longrightarrow$ جوابها : چندجمله‌ای های لژاندر (L)

فرمول رودریگز: $L_k = \frac{1}{2^k\, k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2-1)^k \; ; \; k = 0, 1, 2, \ldots$

W : تابع وزن

خاصیت تعامد : $\int_{-1}^{+1} L_i(x)\, L_j(x)\, dx = \frac{2}{2j+1}\, \delta_{ij}$

معادله بسل : $\overset{P_1}{x^2} y'' + \overset{P_2}{x} y' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \longrightarrow y'' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{P(x)} y' + \underbrace{(1 - \nu^2/x^2)}_{Q(x)} y = 0$

$x = 0 \longrightarrow P(x), Q(x) \longrightarrow \infty$

$x=0$ نقطه تکین   شرط خودالحاقی بودن : $\frac{dP_1}{dx} = P_2 \longrightarrow 2x \neq x$: معادله بسل خودالحاقی نیست

تابع وزن

$$f(x) = \exp\left[\int \frac{P_2}{P_1}\,dx\right]$$

طبق معادله را در فاکتور $\frac{f(x)}{P_1}$ ضرب کرده تا خودالحاقی شود.

$$f(x) = \exp\left[\int \frac{x}{x^2}\,dx\right] = \exp[\ln x] = x \longrightarrow \text{فاکتور} = \frac{f(x)}{P_1} = \frac{x}{x^2} = 1/x$$

$$\xrightarrow{\text{معادله} \times 1/x} \underbrace{x}_{P_1} y'' + \underbrace{1}_{P_2} y' + \left(x - \nu^2/x\right) y = 0 \qquad \frac{dP_1}{dx} = 1 = P_2 \ \checkmark$$

رابطه بازگشتی : $(j+1)\,L_{j+1}(x) + x\,L_{j-1}(x) - (2j+1)\,x\,L_j(x) = 0$ و $L_N(1) = 1$

$L_0(x) = 1$ $L_2(x) = 1/2\,(3x^2 - 1)$

$L_1(x) = x$ $\int_{-1}^{+1} L_0(x)\,L_1(x)\,dx = 0$, $\int_{-1}^{+1} L_1(x)\,L_1(x)\,dx = 1$

چندجمله‌ای های لژاندر، توابع متعامد نرمالیزه هستند پس هر تابعی بر حسب آنها قابل بسط است.

2

$$Q_{N-1}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\alpha_k}_{\text{ثابت}} L_k(x) \xrightarrow[\times L_N(x)]{N \neq k} \int_{-1}^{+1} L_N(x)\,Q_{N-1}(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \underbrace{\cancel{\int L_N(x)\,L_k(x)\,dx}}_{\text{از شرط تعامد}} \to 0$$

$$\longrightarrow \int_{-1}^{+1} L_N(x)\,Q_{N-1}(x)\,dx = 0 \quad (1)$$

هدف: به دنبال یافتن w ها و نقاط x هستیم:

$$f(x) \simeq P_{2N-1}(x)$$

$$\int_{-1}^{+1} P_{2N-1}(x)\,dx = \underbrace{\int_{-1}^{+1} L_N(x)\, P_{N-1}(x)\,dx}_{\text{صفر است}\ ①} + \int_{-1}^{+1} Q_{N-1}(x)\,dx \longrightarrow \int_{-1}^{+1} P_{2N-1}(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} Q_{N-1}(x)\,dx$$

فرض کنید x_k ها صفرهای چندجمله‌ای لژاندر مرتبه N باشند:

$$L_N(x_k) = 0$$

$$② :\quad Q_{N-1}(x_k) = 0 \quad , \quad P_{2N-1}(x_k) = 0 \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

داریم:

$$Q_{N-1}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k L_k(x) \underset{L_0(x)}{1} \longrightarrow \int_{-1}^{+1} Q_{N-1}(x)\,dx = \overbrace{\sum_k \alpha_k \int_{-1}^{+1} \underbrace{L_0(x) L_k(x)\,dx}_{2\delta_{0k}}}^{2\alpha_0}$$

$$\int_{-1}^{+1} L_i(x) L_j(x)\,dx = \frac{2}{2j+1}\delta_{ij} \xrightarrow[j=0]{i=k} \int_{-1}^{+1} L_0(x) L_k(x)\,dx = \frac{2}{2\times 0+1}\delta_{0k} = 2\delta_{0k}$$

پس به تعریف رسید باید α_0 پیدا شود.

$$Q_{N-1}(x_k) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \underbrace{L_i(x_k)}_{L_{ik}} {}^{*} \qquad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

L_{ik} : المان ماتریس $\longrightarrow$ این ماتریس معکوس دارد : $L L^{-1} = I$

$$\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}\ \sum_{k=0}^{N-1} L^{-1}_{kj}]{\text{طرفین را در}} \sum_{k=0}^{N-1} L^{-1}_{kj} Q_{N-1}(x_k) = \sum_{i=0}^{N-1} \cancel{\sum_{k=0}^{N-1}} \alpha_i \underbrace{L_{ik} L^{-1}_{kj}}_{\delta_{ij}} = \alpha_j$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} L_{ik} L^{-1}_{kj} = (L L^{-1})_{ij} = \delta_{ij}$$

$$\Longrightarrow \alpha_j = \sum_{k=0}^{N-1} L^{-1}_{kj} Q_{N-1}(x_k)$$

$$\int_{-1}^{+1} P_{2N-1}(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} Q_{N-1}(x)\,dx = 2\alpha_0 \doteq 2\sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{(L^{-1})_{k0}}_{\text{وزن ها}} \underbrace{Q_{N-1}(x_k)}_{\simeq P_{2N-1}(x_k)}$$

x_k ⟵ صفرهای تابع L

طورستیم : $\int f(x)\,dx = \sum w_i P_{2N-1}(x_i)$

مثال: $f(x)$ را با چندجمله‌ای $P_3(x)$ از مرتبه ۴ تقریب بزنیم.

x_i ها همان نقاط تقسیم، صفرهای چندجمله‌ای لژاندر مرتبه ۲ است.

$$f(x) \simeq P_{2N-1}(x) \longrightarrow 2N-1=3 \longrightarrow N=2$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) = 0 \longrightarrow x_0 = -1/\sqrt{3} \;,\; x_1 = 1/\sqrt{3}$$

$$* \xrightarrow[N=2]{} Q_1(x_k) = \sum_{i=0}^{1} \alpha_i L_{ik} \Longrightarrow \begin{cases} Q_1(x_0) = \alpha_0 \underbrace{L_0(x_0)}_{1} + \alpha_1 \underbrace{L_1(x_0)}_{x_0} \\ Q_1(x_1) = \alpha_0 \underbrace{L_0(x_1)}_{1} + \alpha_1 \underbrace{L_1(x_1)}_{x_1} \end{cases}$$

$$L_1(x) = x$$

$$\longrightarrow \begin{cases} Q_1(x_0) = \alpha_0 + \alpha_1(-1/\sqrt{3}) \\ Q_1(x_1) = \alpha_0 + \alpha_1(1/\sqrt{3}) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{3} \\ 1 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \longrightarrow L^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1 & +1 \end{pmatrix}$$

$$w = 2(L^{-1})_{i0} \longrightarrow w_0 = 2(L^{-1})_{00} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1/\sqrt{3} = 1$$

$$\omega_1 = 2\,(L^{-1})_{10} = 2 \times \sqrt{3}/2 \times 1/\sqrt{3} = 1$$

$\longrightarrow$ روش گاوس : $\omega = \{1, 1\}$, $x = \{-1/\sqrt{3} , 1/\sqrt{3}\}$

مثال : $f(x) = x^2$

$$\int_{-1}^{+1} \underbrace{f(x)}_{x^2}\, dx \simeq \sum_{j=0}^{N-1} \underbrace{P_{2N-1}(x_j)}_{\simeq x_j^2}\, \omega_j = x_0^2\, \omega_0 + x_1^2\, \omega_1$$

$$= 1/3 \times 1 + 1/3 \times 1 = 2/3 \quad \checkmark$$

با روش ذوزنقه :

$$\int_{-1 \,(a)}^{+1 \,(b)} f(x)\, dx = \frac{b-a}{2}\left[\underbrace{f(a)}_{a^2}/2 + \underbrace{f(b)}_{b^2}/2\right] = 1/2 + 1/2 = 1$$

برنامه : تابعی که ضریب جمله‌ای‌های لژاندر را محاسبه کند.

$$(j+1)\, L_{j+1}(x) + x\, L_{j-1}(x) - (2j+1)\, x\, L_j(x) = 0$$

$s \rightarrow L_{j+1}$

$r \rightarrow L_j$

$t \rightarrow L_{j-1}$

```
double   Legendre ( int n, double x){
      double r,s,t;
       int    m;
       r=0;   s=1;
      for (m=0 ; m<n ; m++){
```

```
t=r;    r=s;
s=(2*m+1)*x*r-m*t;
s/=(m+1);}
return s;}
```

$m=0$ → $s = x \times r - 0$

$m=1$: $s = 3x \times r - \underbrace{1 \times t}_{x}$, $s = x$