جلسه نهم : توابع لژاندر حل معادله لژاندر فرمول رودریگز

حل معادله لژاندر

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+ky=0 \rightsquigarrow x=\mp 1 :$$ نقاط منفرد تکین

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\alpha} \longrightarrow y'=\sum a_n(n+\alpha)x^{n+\alpha-1}$$

$$y''=\sum a_n(n+\alpha)(n+\alpha-1)x^{n+\alpha-2}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\Big[a_n(n+\alpha)(n+\alpha-1)x^{n+\alpha-2}-a_n\underbrace{\{(n+\alpha)(n+\alpha-1)+2(n+\alpha)-k\}}_{(n+\alpha)[n+\alpha-1+2]-k=(n+\alpha)(n+\alpha+1)-k}x^{n+\alpha}\Big]=0$$

$x^{\alpha-2}$ ضریب (در جمله اول $n=0$) $=a_0(\alpha)(\alpha-1)=0 \xrightarrow[a_0\neq 0]{\text{فرض}} \alpha(\alpha-1)=0 \Longrightarrow \alpha=0$ یا $\alpha=1$

$x^{\alpha-1}$ ضریب (در جمله اول $n=1$) $=a_1(1+\alpha)\alpha=0 \longrightarrow$
- اگر $\alpha=0 \longrightarrow$ a_1 می‌تواند صفر نباشد
- اگر $\alpha=1 \longrightarrow a_1=0$ حتماً

جمله اول : $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}a_n(n+\alpha)(n+\alpha-1)x^{n+\alpha-2}=\sum_{m=0}^{\infty}a_{m+2}(m+2+\alpha)(m+\alpha+1)x^{m+\alpha}$

$n-2=m \Longrightarrow n=m+2 \rightsquigarrow m=0 \equiv n=2$

جمله دوم : $n=m \longrightarrow \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\{(m+\alpha)(m+\alpha+1)-k\}a_m x^{m+\alpha}$

$$\longrightarrow \sum_{m=0}^{\infty}\Big\{\underbrace{a_{m+2}(m+2+\alpha)(m+\alpha+1)-[(m+\alpha)(m+\alpha+1)-k]a_m}_{\text{باید مساوی صفر باشد}}\Big\}x^{m+\alpha}=0$$

رابطه بازگشتی : $\displaystyle a_{m+2}=\frac{(m+\alpha)(m+\alpha+1)-k}{(m+\alpha+1)(m+\alpha+2)}a_m$

چون تفاضل ریشه‌های معادله اندیسی برابر یک عدد صحیح است . ریشه کوچکتر ($\alpha=0$) یک جواب می‌دهد و ریشه بزرگتر جواب مستقل از ریشه کوچکتر ندارد $\Longleftarrow$ به دلخواه می‌توان a_1 را صفر یا غیرصفر در نظر گرفت.

$$\alpha=0 \Longrightarrow a_{m+2}=\frac{m(m+1)-k}{(m+1)(m+2)}a_m$$

$a_0\neq 0 \longrightarrow a_{2n}\neq 0$

انتخاب $a_1\neq 0 \longrightarrow a_{2n+1}\neq 0$

$$\longrightarrow y=\sum_{n=0}^{\infty}\overset{\propto a_0}{a_{2n}}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\overset{\propto a_1}{a_{2n+1}}x^{2n+1}=a_0\underbrace{y_1(x)}_{\text{توابع زوج}}+a_1\underbrace{y_2(x)}_{\text{توابع فرد}}$$

مسائلی در فیزیک مد نظر است که در بازه $[+1 , -1]$ تعریف شده اند و سری های بالا در $n \to \infty$ و به ازای

$x = \mp 1$ واگرا هستند ← رفع مشکل: سری را در یک نقطه قطع می‌کنیم: $n = l \rightarrow a_{l+2}=0$

$\Longrightarrow$ رابطه بازگشتی: $a_{l+2}=0 \Longrightarrow l(l+1)-k=0 \Longrightarrow k=l(l+1)$

* نکته: برای این که جوابهای متناهی فیزیکی داشته باشیم باید k برابر $l(l+1)$ باشد. (از نظر ریاضی این شرط لازم نیست.

$$m=0 \Longrightarrow a_2 = \frac{-l(l+1)}{2.1} a_0$$

$$m=1 \Longrightarrow a_3 = \frac{1\cdot 2 - l(l+1)}{2.3} a_1 = \frac{-a_1}{3!}\{l^2+l-2\} = -\frac{1}{3!} a_1 (l-1)(l+2)$$

$$m=2 \Longrightarrow a_4 = \frac{2\cdot 3 - l(l+1)}{3.4} a_2 = \frac{2.3-l(l+1)}{3.4}\,\frac{-l(l+1)}{2.1} a_0$$

$$a_4 = \frac{a_0}{4!} l(l+1)\{\underbrace{-6+l(l+1)}_{l^2+l-6}\} = \frac{1}{4!} l(l+1)(l-2)(l+3) a_0$$

l: even $\quad P_l(x) = a_0\left[1 - \frac{l(l+1)}{2!}x^2 + \frac{1}{4!} l(l+1)(l-2)(l+3)x^4 + \cdots\right]$

l: odd $\quad P_l(x) = a_1\left[x - \frac{1}{3!}(l-1)(l+2)x^3 + \frac{1}{5!}(l-1)(l+2)(l+4)x^5 + \cdots\right]$

جوابهای فوق را به شکل سری می‌نویسیم:

l: even $\quad P_l(x) = a_0 \sum_{s=0}^{l/2} (-1)^s \frac{[(l/2)!]^2}{(l/2+s)!\,(l/2-s)!}\,\frac{(l+2s)!}{l!}\,\frac{x^{2s}}{(2s)!}$

l: odd $\quad P_l(x) = a_1 \sum_{s=0}^{\frac{l-1}{2}} (-1)^s \frac{[\frac{l-1}{2}!]^2}{(\frac{l-1}{2}+s)!\,(\frac{l-1}{2}-s)!}\,\frac{(l+2s)!}{l!}\,\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}$

l: even $\longrightarrow l/2 - s = r \quad , \quad l$: odd $\longrightarrow \frac{l-1}{2} - s = r$

دو سری را به شکل واحدی می‌نویسیم:

$\downarrow$

$S=0 \equiv r = l/2 \quad , \quad S = l/2 \equiv r=0$

$S = l/2 - r \Longrightarrow l/2 + S = l - r$

$l + 2S = l + l - 2r = 2l - 2r$

$(-1)^{l/2}(-1)^{-r}$

$$P_l^{\text{even}}(x) = \sum_{r=0}^{l/2} (-1)^{l/2-r} \frac{(l/2!)^2}{(l-r)!\,r!}\,\frac{(2l-2r)!}{l!}\,\frac{x^{l-2r}}{(l-2r)!}$$

هم برای l های زوج و هم برای l های فرد، می توان داشت :

$$P_l(x) = C_l \sum_{r=0}^{[l/2]} (-1)^r \frac{(2l-2r)!}{r!\,(l-r)!} \frac{x^{l-2r}}{(l-2r)!}$$

$$[l/2] = \begin{cases} l/2 & l: \text{even} \\ \frac{l-1}{2} & l: \text{odd} \end{cases} \qquad C_l = \begin{cases} (-1)^{l/2} \dfrac{\left[\frac{l}{2}!\right]^2}{l!} a_0 \\ (-1)^{\frac{l-1}{2}} \dfrac{\left[\frac{l-1}{2}!\right]^2}{l!} a_1 \end{cases}$$

یادآوری : $(a+b)^N = \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} a^m b^{N-m}$; $\binom{N}{m} = \frac{N!}{m!\,(N-m)!}$

$$(x^2-1)^l = \sum_{r=0}^{l} \binom{l}{r} (-1)^r (x^2)^{l-r} = \sum_{r=0} \frac{l!\,(-1)^r}{r!\,(l-r)!} x^{2l-2r} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} x^{2l-2r} = (2l-2r)\, x^{2l-2r-1} \quad , \quad \frac{d^2}{dx^2} x^{2l-2r} = (2l-2r)(2l-2r-1)\, x^{2l-2r-2}$$

$$\frac{d^l}{dx^l} x^{2l-2r} = (2l-2r)(2l-2r-1)\cdots\overbrace{(2l-2r-(l-1))}^{l-2r+1}\, x^{2l-2r-l} \qquad 2l-2r-l = l-2r$$

$$\longrightarrow \frac{d^l}{dx^l} x^{2l-2r} = \frac{(2l-2r)!}{(l-2r)!} x^{l-2r} \qquad \times \frac{(l-2r)\cdots 2.1}{(l-2r)\cdots 2.1}$$

$$(1): \xrightarrow[l \text{ مرتبه}]{\text{مشتق}} \frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l = \sum_{r=0}^{l} (-1)^r \frac{l!}{r!\,(l-r)!} \frac{d^l}{dx^l}\left(x^{2l-2r}\right) \quad *$$

$$= \sum_{r=0}^{l} (-1)^r \frac{l!}{r!\,(l-r)!} \frac{(2l-2r)!}{(l-2r)!} x^{l-2r}$$

$$P_l(x) = \frac{C_l}{l!} \sum_{r=0}^{\cancel{[l/2]}\; l} (-1)^r \frac{(2l-2r)!}{r!\,(l-r)!} \frac{x^{l-2r}\, l!}{(l-2r)!} \quad *$$

مشتق مرتبه l ام x^{2l-2r} را داریم. اگر $2l-2r < l$ (به طور معادل $r > l/2$) مشتقات برابر صفر است.

بر همین دلیل می توان جمع $\sum_{r=0}^{l}$ را به $\sum_{r=0}^{l/2}$ کاهش داد

$$\xrightarrow{*,*} P_l(x) = \frac{C_l}{l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l$$

C_l را می توان از شرط نرمالیزاسیون یافت : $P_l(x=1) = 1$

$$(x^2-1)^l = \left[(x-1)(x+1)\right]^l = \underbrace{(x-1)\cdots(x-1)}_{l\ \text{بار}}\underbrace{(x+1)\cdots(x+1)}_{l\ \text{بار}}$$

$$\Longrightarrow \frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)\Big|_{x=1} = 2^l\, l! \qquad \Longrightarrow P_l(x=1) = \frac{C_l}{l!}\, 2^l\, l! = 1$$

$$\Longrightarrow C_l = \frac{1}{2^l} \qquad \Longrightarrow \boxed{P_l(x) = \frac{1}{2^l\, l!}\,\frac{d^l}{dx^l}\,(x^2-1)^l}$$

فرمول رودریگز