جلسه هشتم: تعامد توابع بسل   سری بسل   حل چند مثال

تعامد توابع بسل

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \longleftrightarrow P_0 y'' + P_1 y' + P_2 y = 0$$

$$\xrightarrow{\times 1/x} \quad x y'' + y' + (x - \nu^2/x) y = 0 \quad : \quad \text{معادله خودالحاقی بسل} \; (P_0' = P_1)$$

$\longrightarrow$ صورت کلی معادلات خودالحاقی : $\underbrace{P_0 y'' + P_0' y'}_{\frac{d}{dx}(P_0 \frac{dy}{dx})} + P_2 y = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(P_0 \frac{dy}{dx}\right) + P_2 y = 0$

معادله بسل: $\frac{d}{dx}\left(x \frac{dy}{dx}\right) + (x - \nu^2/x) y = 0$

جلسه قبل: $x \gg 1 \longrightarrow J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \pi/4\right)$

صفرهای تابع بسل: $x - \nu\pi/2 - \pi/4 = n\pi \Longrightarrow x_{\nu n} = n\pi + \pi/2(\nu + 1/2)$

بازه $[0, a]$ مد نظر است:

$$J_\nu(x) \longrightarrow J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a} x\right)$$

$J_\nu(x_{\nu n}) = 0$: تابع بسل در $x = a$ صفر شود

معادله بسل برای $J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a} x\right)$ را بدست می‌آوریم:

$$x \longrightarrow \frac{x_{\nu n}}{a} x$$

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + (x - \nu^2/x) y = 0 \longrightarrow$$

$$\frac{\cancel{x_{\nu n}}}{\cancel{a}} x \frac{d^2 y}{\frac{x_{\nu n}}{a}\, d\left(\frac{\cancel{x_{\nu n}}}{\cancel{a}} x\right)^2} + \frac{dy}{d\left(\frac{x_{\nu n}}{a} x\right)} + \left(\frac{x_{\nu n}}{a} x - \frac{\nu^2 a}{x_{\nu n} x}\right) y = 0$$

$$\xrightarrow{\times \frac{x_{\nu n}}{a}} x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \left(\frac{x_{\nu n}^2}{a^2} x - \frac{\nu^2}{x}\right) y = 0$$

$$J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a} x\right) \frac{d}{dx}\left[x \frac{d}{dx} J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a} x\right)\right] + \left(\frac{x_{\nu n}^2}{a^2} x - \frac{\nu^2}{x}\right) J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a} x\right) = 0 \xrightarrow{\times J_\nu(x_{\nu m} x/a)}$$

$$J_\nu\left(\frac{x_{\nu m}}{a} x\right) \frac{d}{dx}\left[x \frac{d}{dx} J_\nu\left(\frac{x_{\nu m}}{a} x\right)\right] + \left(\frac{x_{\nu m}^2}{a^2} x - \frac{\nu^2}{x}\right) J_\nu\left(\frac{x_{\nu m}}{a} x\right) = 0 \xrightarrow{\times J_\nu(x_{\nu n} x/a)}$$

دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$\longrightarrow \int_0^a J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a}x\right)\frac{d}{dx}\left[x\underbrace{\frac{d}{dx}J_\nu\left(\frac{x_{\nu m}}{a}x\right)}\right]dx-\int_0^a J_\nu\left(\frac{x_{\nu m}}{a}x\right)\frac{d}{dx}\left[x\underbrace{\frac{d}{dx}J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a}x\right)}_{J_\nu'\left(\frac{x_{\nu n}}{a}x\right)}\right]dx$$

$$+\frac{x_{\nu m}^2-x_{\nu n}^2}{a^2}\int_0^a x\,J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a}x\right)J_\nu\left(\frac{x_{\nu m}}{a}x\right)dx=0 \qquad (I)$$

از $x=0$ تا $x=a$ انتگرال می‌گیریم:

رونسکین : Wronskian : $W=\begin{vmatrix} f_1 & \cdots & f_n \\ f_1' & \cdots & f_n' \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}_{n\times n}$

$$W\left\{J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a}x\right),J_\nu\left(\frac{x_{\nu m}}{a}x\right)\right\}=\begin{vmatrix} J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a}x\right) & J_\nu\left(\frac{x_{\nu m}}{a}x\right) \\ J_\nu'\left(\frac{x_{\nu n}}{a}x\right) & J_\nu'\left(\frac{x_{\nu m}}{a}x\right)\end{vmatrix}$$

$$\frac{d}{dx}\left[xW\right]=\frac{d}{dx}\left\{x J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a}x\right)\frac{d}{dx}J_\nu\left(\frac{x_{\nu m}}{a}x\right)-xJ_\nu\left(\frac{x_{\nu m}}{a}x\right)\frac{d}{dx}J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a}x\right)\right\}$$

$$=J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}x}{a}\right)\frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}J_\nu\left(\frac{x_{\nu m}}{a}x\right)\right]+\cancel{\frac{dJ_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a}x\right)}{dx}x\frac{d}{dx}J_\nu\left(\frac{x_{\nu m}}{a}x\right)}$$

$$-J_\nu\left(\frac{x_{\nu m}x}{a}\right)\frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a}x\right)\right]-\cancel{\frac{dJ_\nu\left(\frac{x_{\nu m}}{a}x\right)}{dx}x\frac{d}{dx}J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a}x\right)}$$

$$\longrightarrow I:\ \underbrace{\int_0^a \cancel{dx}\frac{d}{\cancel{dx}}\left[xW\right]}_{xW\big|_0^a}+\frac{x_{\nu m}^2-x_{\nu n}^2}{a^2}\int_0^a J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a}x\right)J_\nu\left(\frac{x_{\nu m}}{a}x\right)x\,dx=0$$

$$\longrightarrow \int_0^a J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a}x\right)J_\nu\left(\frac{x_{\nu m}}{a}x\right)x\,dx=\frac{xW\big|_0^a}{\frac{1}{a^2}\left(x_{\nu m}^2-x_{\nu n}^2\right)} \qquad II$$

$$=\lambda_1^2-\lambda_2^2$$

اگر $n=m$ باشد، صورت و مخرج هر دو برابر صفر می‌شوند که باید رفع ابهام کنیم.

اگر $n\neq m$ باشد، رابطه II برابر صفر است.

$$\lambda_2=\frac{x_{\nu n}}{a}\ ,\quad \lambda_1=\frac{x_{\nu m}}{a}$$

سمت راست رابطه II $=\lim\limits_{\lambda_1\to\lambda_2}\dfrac{x\ dW/d\lambda_1\big|_0^a}{2\lambda_1}$

$$\frac{dW}{d\lambda_1}=\frac{d}{d\lambda_1}J_\nu(\lambda_1x)\frac{d}{dx}J_\nu(\lambda_2x)-J_\nu(\lambda_1x)\frac{d}{d\lambda_1}\frac{d}{dx}J_\nu(\lambda_2x)$$

$$\lambda_2\, d/d\lambda_2\, J_\nu(\lambda_2 x)$$

$$=\underbrace{\frac{1}{x}\frac{d}{d\lambda_1}J_\nu(\lambda_1x)\,x\frac{d}{dx}J_\nu(\lambda_2x)}_{\text{یک } x \text{ ضرب و تقسیم کنیم}}-J_\nu(\lambda_1x)\frac{d}{d\lambda_1}\frac{d}{dx}J_\nu(\lambda_2x)$$

$\Longrightarrow$ II سمت راست $= \frac{1}{2\lambda_1}\left\{ \frac{x}{\cancel{x}} \underbrace{\frac{d}{d\lambda_1}J_\nu(\lambda_1 x)\,\lambda_1 \frac{d}{d\lambda_1}J_\nu(\lambda_1 x)}_{\lambda_1\left[\frac{d}{d\lambda_1}J_\nu(\lambda_1 x)\right]^2} - x J_\nu(\lambda_1 x)\frac{d}{d\lambda_1}\frac{d}{dx}J_\nu(\lambda_1 x)\right\}\Bigg|_0^a$

$J_\nu(\lambda_1 a)=0$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{d}{d\lambda_1}J_\nu(\lambda_1 x)\right]^2\Bigg|_0^a$: صورت و مخرج را در x ضرب می‌کنیم

$J_\nu(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \cdots \left(x/2\right)^{2r+\nu} \underset{x=0}{=} 0$

$= \frac{1}{2}x^2\left[\frac{d}{d(\lambda_1 x)}J_\nu(\lambda_1 x)\right]^2_{x=a} = \frac{x^2}{2}\left\{\frac{\nu}{\lambda_1 x}\underset{0}{J_\nu(\lambda_1 x)} + J_{\nu+1}(\lambda_1 x)\right\}\Bigg|_{x=a} = \frac{a^2}{2}J_{\nu+1}(\lambda_1 a)$

در $x=a$

یادآوری : $J_\nu'(x) = \frac{\nu}{x}J_\nu(x) + J_{\nu+1}(x)$

$$\to \int_0^a x\,dx\, J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a}x\right) J_\nu\left(\frac{x_{\nu m}}{a}x\right)dx = \frac{a^2}{2}J_{\nu+1}(x_{\nu n})\,\delta_{nm}$$

یادآوری : $f(x)$ یک تابع پریودیک در فاصله $(0, 2\pi)$ است. $\cos nx$ و $\sin nx$ توابع مستقل خطی هستند. پس تابع $f(x)$ را می‌توان برحسب توابع مستقل خطی بسط داد: سری فوریه

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$\int_0^{2\pi}\cos mx\, f(x)\,dx = \frac{1}{2}a_0\int_0^{2\pi}\cos mx\,dx + \underbrace{\sum_n a_n \overbrace{\int_0^{2\pi}\cos nx\cos mx\,dx}^{\pi\delta_{nm}}}_{\pi\sum_n a_n\delta_{mn} = a_m\pi} + b_n\int_0^{2\pi}\cos mx\,\cancel{\sin nx}\,dx$$

$$\to a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos mx\, f(x)\,dx$$

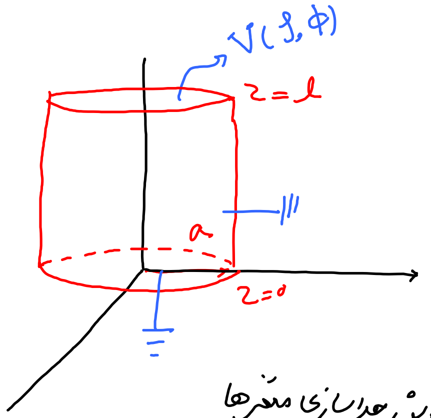
سری فوریه بسل

مجموعه توابع بسل، مجموعه مستقل از هم و کامل هستند:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\nu n} J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a}x\right) \qquad 0\leq x\leq a \qquad \nu > -1$$

$$\xrightarrow{\times x J_\nu\left(\frac{x_{\nu m}}{a}x\right)} \int_0^a x f(x) J_\nu\left(\frac{x_{\nu m}}{a}x\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\nu n}\underbrace{\int_0^a J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}}{a}x\right)J_\nu\left(\frac{x_{\nu m}}{a}x\right)x\,dx}_{\delta_{mn}\frac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2\left(\frac{x_{\nu n}}{a}x\right)}$$

$$\to a_{\nu m} = \frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2\left(\frac{x_{\nu n}}{a}x\right)}\int_0^a x f(x) J_\nu\left(\frac{x_{\nu m}}{a}x\right)dx$$



مثال ۱: پتانسیل الکترواستاتیکی درون یک استوانه توخالی به شکل مقابل را بدست آورید.

$$\nabla^2\Phi = \rho/\epsilon_0 \xrightarrow{\rho=0} \nabla^2\Phi = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\Phi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

روش جداسازی متغیرها: $\Phi(\rho,\theta,z) = P(\rho)\,\Theta(\theta)\,Z(z)$

$$\Theta Z\frac{d^2P}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\Theta Z\frac{dP}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}PZ + P\Theta\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

طرفین را به $P\Theta Z$ تقسیم می‌کنیم و در ρ^2 ضرب می‌کنیم:

$$\underbrace{\rho^2\frac{d^2P}{d\rho^2}\frac{1}{P} + \frac{\rho}{P}\frac{dP}{d\rho} + \frac{\rho^2}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}}_{\text{فقط تابع } \rho \text{ و } z} = \underbrace{-\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}}_{\text{فقط تابع } \theta} = m^2$$

علامت مثبت به دلیل پریودیک بودن پتانسیل روی θ است

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -m^2\Theta \Longrightarrow \boxed{\Theta(\theta) = A\cos m\theta + B\sin m\theta} \longrightarrow \cos(m\theta) = \cos(m(\theta+2\pi))$$

m باید صحیح باشد تا پتانسیل تک مقدار باشد.

تقسیم بر ρ^2:

$$\frac{d^2P}{d\rho^2}\frac{1}{P} + \frac{1}{\rho P}\frac{dP}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} = \frac{-1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k^2 \quad *$$

علامت منفی به دلیل پریودیک نبودن پتانسیل روی z است.

$$\frac{d^2Z}{dz^2} = k^2 Z \longrightarrow Z(z) = A'\cosh kz + B'\sinh kz \xrightarrow[\text{پتانسیل صفر است.}]{z=0} Z(0) = A'\cosh 0 = A' = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{Z = B'\sinh kz}$$

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad \to \quad J_\nu(x),\ N_\nu(x)$$

$$* \times \rho^2 P \Longrightarrow \rho^2\frac{d^2P}{d\rho^2} + \rho\frac{dP}{d\rho} + (k^2\rho^2 - m^2)P = 0$$: معادله بسل

$$\longrightarrow P(\rho) = A''J_m(k\rho) + \cancel{B''N_m(k\rho)} \Longrightarrow \boxed{P(\rho) = A''J_m\left(\frac{x_{ms}}{a}\rho\right)}$$

چون تابع نویمان در $\rho=0$ واگراست.

$$\rho = a \longrightarrow V = 0 \longrightarrow P(\rho=a) = 0 \Longrightarrow J_m(ka) = 0 \longrightarrow \boxed{k = \frac{x_{ms}}{a}}$$

x_{ms}: صفرهای تابع بسل

$$\longrightarrow \Phi(\rho,\theta,\overset{=L}{z}) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(A_{ms}\cos m\theta + B_{ms}\sin m\theta)\sinh\left(\frac{x_{ms}}{a}L\right)J_m\left(\frac{x_{ms}}{a}\rho\right)$$

طرفین را در $\rho\cos(n\theta)J_n\left(\frac{x_{ns'}}{a}\rho\right)$ ضرب کرده و روی ρ از صفر تا a و روی θ از ۰ تا 2π انتگرال می‌گیریم:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{a} \rho\, \varphi(\rho,\theta,z)\cos(n\theta) J_n\!\left(\frac{x_{ns'}}{a}\rho\right) d\rho\, d\theta = \sum_{m,s} A_{ms}\sinh\!\left(\frac{x_{ms}}{a}L\right)\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos m\theta \cos n\theta\, d\theta}_{\pi\delta_{mn}}$$

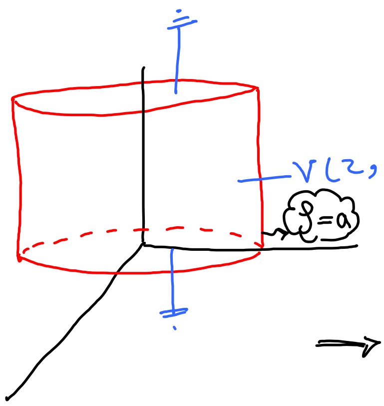
$$\underbrace{\int_0^{a} J_m\!\left(\frac{x_{ms}}{a}\rho\right) J_n\!\left(\frac{x_{ns'}}{a}\rho\right)\rho\, d\rho}_{m=n\ :\ \frac{a^2}{2} J_{m+1}^2(x_{ms})\,\delta_{ss'}} + B_{ms}\sinh\!\left(\frac{x_{ms}}{a}L\right)\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin m\theta\cos n\theta\, d\theta}_{0}\ \underline{\int_0^{a} J_m\!\left(\frac{x_{ms}}{a}\rho\right) J_n\!\left(\frac{x_{ns'}}{a}\rho\right)\rho\, d\rho}$$

$\longrightarrow$ سمت راست $= A_{ns'}\sinh\!\left(\frac{x_{ns'}}{a}L\right)\pi\,\frac{a^2}{2} J_{n+1}^2(x_{ns'})$

$$\Longrightarrow A_{ns} = \frac{2}{a^2\pi J_{n+1}^2(x_{ns})\sinh\!\left(\frac{x_{ns}}{a}L\right)}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\rho\,\varphi(\rho,\theta,z)\cos(n\theta) J_n\!\left(\frac{x_{ns}}{a}\rho\right) d\rho\, d\theta$$

باهمین روش B_{ms} را نیز بیابید.

مثال ۲: رابطه * بالا به شکل زیر تغییر می‌کند $-k^2 \to +k^2$



$$* \longrightarrow \frac{1}{P}\frac{d^2P}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho P}\frac{dP}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} = -\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = k^2$$

چون پتانسیل روی z پریودیک است.

$\longrightarrow Z(z) = A'\sin kz + B'\cos kz$

$z=0:\ Z=0 \longrightarrow B'=0$

$z=l:\ Z=0 \Longrightarrow A'\sin kl = 0 \longrightarrow kl = n\pi \longrightarrow k = \frac{n\pi}{l}$ $\quad n=1,2,\dots$

$$\rho^2\frac{d^2P}{d\rho^2} + \rho\frac{dP}{d\rho} - (k^2\rho^2 + m^2)P = 0$$

بسل تبدیل یافته

$x^2y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0$

$\longrightarrow I_\nu(x),\ K_\nu(x)$

$\longrightarrow P(\rho) = A'' I_m(k\rho) + B'' K_m(k\rho)$

در $\rho=0$ نامعین است.

$$\rightarrow \varphi(\rho=a,\theta,z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{mn}\cos m\theta + B_{mn}\sin m\theta\right)\sin\!\left(\frac{n\pi}{l}z\right) I_m\!\left(\frac{n\pi}{l}a\right)$$

بدست آوردن A_{mn}: طرفین را در $\cos m'\theta$, $\sin\frac{n'\pi}{l}z$ ضرب کرده و از 0 تا 2π روی θ و از 0 تا l روی z انتگرال می‌گیریم:

$$A_{mn} = \frac{2}{\pi l\, I_m\!\left(\frac{n\pi}{l}a\right)}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{l} V(\theta,z)\sin\frac{n\pi}{l}z\cos(m\theta)\, dz$$

$$B_{mn} = \frac{2}{\pi l\, I_m\!\left(\frac{n\pi}{l}a\right)}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{l} V(\theta,z)\sin\frac{n\pi}{l}z\sin(m\theta)\, dz$$