جلسه پنجم : معادلات قابل تبدیل به معادله بسل ← معادله بسل تعمیم یافته ← نمایش انتگرالی

معادله بسل : $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0 \longrightarrow J_\nu(x)\,,\ N_\nu(x)$

جواب عمومی معادله مقابل را بدست آورید :

$$①:\ x^2y''+xy'+(\lambda^2x^2-\nu^2)y=0$$

تغییر متغیر : $t=\lambda x \longrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\lambda\frac{dy}{dt}\ ,\ \frac{d^2y}{dt^2}=\lambda^2\frac{d^2y}{dt^2}$

$$①:\ \frac{t^2}{\cancel{\lambda^2}}\cancel{\lambda^2}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{t}{\cancel{\lambda}}\cancel{\lambda}\frac{dy}{dt}+(t^2-\nu^2)y=0 \longrightarrow J_\nu(t),\ N_\nu(t)$$

$\longrightarrow$ جواب عمومی : $y=AJ_\nu(t)+BN_\nu(t)=AJ_\nu(\lambda x)+BN_\nu(\lambda x)$

$$②:\ x^2y''+(1-2\alpha)xy'+\left[\beta^2\gamma^2x^{2\gamma}+(\alpha^2-\nu^2\gamma^2)\right]y=0$$

تغییر متغیر : $y=x^\alpha z \longrightarrow \frac{dy}{dx}=\alpha x^{\alpha-1}z+x^\alpha\frac{dz}{dx}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}z+\underbrace{\alpha x^{\alpha-1}\frac{dz}{dx}+\alpha x^{\alpha-1}\frac{dz}{dx}}+x^\alpha\frac{d^2z}{dx^2}$$

$$②:\ \alpha(\alpha-1)zx^\alpha+2\alpha x^{\alpha+1}\frac{dz}{dx}+x^{\alpha+2}\frac{d^2z}{dx^2}+[1-2\alpha]\left\{\alpha zx^\alpha+x^{\alpha+1}\frac{dz}{dx}\right\}$$
$$+\left[\beta^2\gamma^2x^{2\gamma}+(\alpha^2-\nu^2\gamma^2)\right]x^\alpha z=0$$

$$\cancel{x^{\alpha}}{}^{+2}\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{dz}{dx}\left[2\cancel{\alpha}+(1-2\cancel{\alpha})\right]\cancel{x^{\alpha}}{}^{+1}+z\left[\alpha(\alpha-1)\cancel{x^\alpha}+\alpha(1-2\alpha)\cancel{x^\alpha}+\beta^2\gamma^2\cancel{x^\alpha}x^{2\gamma}+(\alpha^2-\nu^2\gamma^2)\cancel{x^\alpha}\right]=0$$

$$\Longrightarrow x^2\frac{d^2z}{dx^2}+x\frac{dz}{dx}+z\Big[\underbrace{\cancel{\alpha^2}-\cancel{\alpha}+\cancel{\alpha}-\cancel{2\alpha^2}+\beta^2\gamma^2x^{2\gamma}+\cancel{\alpha^2}-\nu^2\gamma^2}_{\beta^2\gamma^2x^{2\gamma}-\nu^2\gamma^2}\Big]=0 \quad *$$

تغییر متغیر : $t=x^\gamma \longrightarrow dt/dx=\gamma x^{\gamma-1}$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dt}\,\frac{dt}{dx}=\gamma x^{\gamma-1}\frac{dz}{dt}\quad,\quad \frac{d^2z}{dt^2}=\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2}\frac{dz}{dt}+\gamma x^{\gamma-1}\frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\xrightarrow{*}\ t^2\frac{d^2z}{dt^2}+t\frac{dz}{dt}+(\beta^2t^2-\nu^2)z=0\ \Longrightarrow\ \underset{}{\overset{y/x^{\alpha}}{z}}=A\,J_\nu(\beta t)+B\,N_\nu(\beta t)$$

$$\Longrightarrow\ y(x)=Ax^{\alpha}J_\nu(\beta x^{\gamma})+Bx^{\alpha}N_\nu(\beta x^{\gamma})$$

$\underline{\text{معادله بسل تعمیم یافته}}$

$$x^2y''+xy'-(x^2+\nu^2)y=0$$

$$y=A\,J_\nu(ix)+B\,N_\nu(ix)\ \longleftarrow$$ در معادله ① ، $\lambda^2=-1$ است

$\hookrightarrow \lambda=i$

نشان می‌دهیم $I_\nu(x)$ تابعی حقیقی از x است:

$$I_\nu(x)\equiv i^{-\nu}J_\nu(ix)\quad **$$

$$I_\nu(x)=i^{-\nu}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!\,\Gamma(\nu+r-1)}\left(\frac{ix}{2}\right)^{2r+\nu}=\sum_{r=0}^{\infty}\cancel{(-1)^r}\frac{i^{2r}\,\cancel{(-1)^r}}{r!\,\Gamma(\nu+r-1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+\nu}$$

$$\Longrightarrow\ \boxed{I_\nu(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!\,\Gamma(\nu+r-1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+\nu}}\ \rightsquigarrow$$ تابع بسل تعدیل یافته نوع اول

تبصره: اگر $\nu=n$ (عدد صحیح)، $I_{-n}(x)=I_n(x)$

$$J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$$

$$I_{-n}(x)\overset{**}{=}i^{-n}J_{-n}(ix)=i^n(-1)^n\underbrace{J_n(ix)}=i^{2n}(-1)^nI_n(x)=\underbrace{(-1)^n(-1)^n}_{1}I_n(x)=I_n(x)$$

$$**:\ \frac{I_n(x)}{i^{-n}}$$

جواب دوم معادله بسل تعمیم یافته:

$$K_\nu\equiv\frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin\nu\pi}$$

اگر $\nu=n\ \longrightarrow\ K_n=\dfrac{\pi}{2}\lim\limits_{\nu\to n}\dfrac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin\nu\pi}\overset{\text{قاعده هوپیتال}}{=}\dfrac{\cancel{\pi}}{2}\left.\dfrac{\frac{\partial}{\partial\nu}I_{-\nu}(x)-\frac{\partial}{\partial\nu}I_\nu(x)}{\cancel{\pi}\underbrace{\cos\nu\pi}_{(-1)^n}}\right|_{\nu=n}$

$$=\frac{(-1)^n}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\nu}I_{-\nu}(x)-\frac{\partial}{\partial\nu}I_\nu(x)\right]_{\nu=n}$$

* تمرین : از رابطه تابع بسل تعدیل یافته نوع I استفاده کرده و شکل صریحی برای $K_\nu(x)$ بدست آورید

* تمرین : ذره آزاد در پتانسیل جعبه کروی را حل کنید ← فصل ۶ زتیلی.

شکل دیگری برای $K_\nu(x)$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\, i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix)$$

اثبات : $$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin\nu\pi} \overset{**}{=} \frac{\pi}{2}\,\frac{i^{\nu} J_{-\nu}(ix) - i^{-\nu} J_\nu(ix)}{\sin\nu\pi}$$

$$J_{-\nu}(ix) = J_\nu(ix)\cos\nu\pi - N_\nu(ix)\sin\nu\pi$$ طرح :

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\, i^{\nu+1}\left[iN_\nu(ix) + \frac{\overbrace{-i\cos\nu\pi - i^{-2\nu-1}}^{\sin\nu\pi}}{\sin\nu\pi} J_\nu(ix)\right] = \frac{\pi}{2}\, i^{\nu+1}\Big[\underbrace{J_\nu(ix) + iN_\nu(ix)}_{H_\nu^{(1)}(ix)}\Big] \checkmark$$

$$-i\cos\nu\pi - i^{-2\nu-1} = i\left[-\cos\nu\pi + i^{-2\nu}\right] = i\left[-\cancel{\cos\nu\pi} + \underbrace{(e^{i\pi/2})^{-2\nu}}_{e^{-i\pi\nu}}\right] = \sin\nu\pi$$

$$\frac{i^{-2\nu}}{i} = -i^{-2\nu+1} \qquad i = e^{i\pi/2} \qquad e^{-i\pi\nu} = \cancel{\cos\nu\pi} - i\sin\nu\pi$$

روابط بازگشتی برای توابع بسل تعدیل یافته

I) $$\frac{d}{dx}\left[x^\nu I_\nu(x)\right] = x^\nu I_{\nu-1}(x)$$

داشتیم : $$\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) = x^\nu J_{\nu-1}(x) \quad *'$$

II) $$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} I_\nu(x)\right] = x^{-\nu} I_{\nu+1}(x)$$

III) $$I'_\nu(x) = I_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} I_\nu(x)$$

IV) $$I'_\nu(x) = \frac{\nu}{x} I_\nu(x) + I_{\nu+1}(x)$$

V) $$I'_\nu(x) = \frac{1}{2}\left[I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x)\right]$$

VI) $$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_\nu(x)$$

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix)$$

اثبات رابطه I :

$$*' : x \to ix \implies \frac{d}{d(ix)}\left((ix)^\nu J_\nu(ix)\right) = (ix)^\nu J_{\nu-1}(ix)$$

$$\Rightarrow -i\frac{d}{dx}\left[i^{\nu}x^{\nu}J_\nu(ix)\right] = i^{\nu}x^{\nu}J_{\nu-1}(ix) \xRightarrow{\times i^{-2\nu}} -i\frac{d}{dx}\left(i^{-\nu}J_\nu(ix)\,x^{\nu}\right) = i^{-\nu}x^{\nu}J_{\nu-1}(ix)$$

$$\xRightarrow{i} \frac{d}{dx}\Big(\underbrace{i^{-\nu}J_\nu(ix)}_{I_\nu(x)}\,x^{\nu}\Big) = \underbrace{i^{-\nu+1}J_{\nu-1}(x)}_{I_{\nu-1}(x)}\,x^{\nu} \quad ✓$$

* تمرین: بقیه روابط را اثبات کنید.

نمایش انتگرالی توابع بسل تعمیم یافته

قضیه: توابع $I_\nu(x)$ و $K_\nu(x)$ در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$I_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\int_{-1}^{+1} e^{-xt}(1-t^2)^{\nu-1/2}\,dt \qquad \nu>-1/2$$

$$K_\nu(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\int_{1}^{\infty} e^{-xt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt \qquad \nu>-1/2 \text{ و } x>0$$

اثبات $I_\nu(x)$:

یادآوری: $J_\nu(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\nu}\displaystyle\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{\nu-1/2}e^{ixt}\,dt \quad (\nu>-1/2)$

$$I_\nu(x) = i^{-\nu}J_\nu(ix)$$

$$I_\nu(x) = \frac{\cancel{i^{-\nu}}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\underbrace{\left(\frac{ix}{2}\right)^{\nu}}_{\cancel{i^{\nu}}(x/2)^{\nu}}\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{\nu-1/2}\,\overbrace{e^{i(ix)t}}^{-xt}\,dt \quad ✓$$

اثبات $K_\nu(x)$:

$$P = x^{\nu}\int_{1}^{\infty} e^{-xt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt$$

* تمرین: نشان دهید P در معادله بسل تعمیم یافته صدق می‌کند. پس:

$$P = A\,I_\nu(x) + B\,K_\nu(x)$$

نشان می‌دهیم که P نمی‌تواند از جنس $I_\nu(x)$ باشد پس $A=0$ است.

اثبات می‌کنیم وقتی $x\to\infty$ ، $P\to 0$ می‌رود:

$$x\to\infty: \quad (t^2-1)^{\nu-1/2} < e^{xt/2}$$

$$P < x^{\nu}\int_{1}^{\infty} e^{-xt}e^{xt/2}\,dt = x^{\nu}\int_{1}^{\infty} e^{-xt/2}\,dt = x^{\nu}\left[-\frac{2}{x}e^{-xt/2}\right]_{1}^{\infty} = -2x^{\nu-1}e^{-tx/2}\Big|_{t=1}^{t=\infty}$$

$\Rightarrow P < 0 + 2x^{\nu-1} e^{-x/2} \xrightarrow{x\to\infty} 0$

وقتی $\begin{cases} I_\nu(x) \longrightarrow \infty & : x\to\infty \\ P \longrightarrow 0 & : x\to\infty \end{cases}$ $\Leftarrow$ توانهای P , $I_\nu(x)$ با هم متفاوت هستند. پس $\boxed{A=0}$

$$\Longrightarrow P(x) = B\, K_\nu(x) \quad ①$$

برای یافتن B، رفتار $P(x)$ و $K_\nu(x)$ را در $x\longrightarrow 0$ بررسی می‌کنیم:

الف - رفتار $K_\nu(x)$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin\nu\pi}$$

$$I_\nu(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!\,\Gamma(\nu+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+\nu} \quad , \quad I_{-\nu}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!\,\Gamma(-\nu+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r-\nu}$$

وقتی $x\longrightarrow 0$ ، چون توانهای x مثبت هستند:

$$I_\nu(x\to 0) \longrightarrow 0$$

$I_{-\nu}(x)$ دارای توانهای منفی x است. پس پایین‌ترین توان در بررسی فوق مهم است:

$$r=0 : \text{پایین‌ترین توان} = \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)}\left(x/2\right)^{-\nu}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} K_\nu(x) \simeq \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sin\nu\pi}\,\frac{1}{\Gamma(-\nu+1)}\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} \quad \Bigg\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} K_\nu(x) = \frac{\Gamma(\nu)\,2^{\nu-1}}{x^\nu} \quad ②$$

داشتیم : $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin\pi x}$

ب - رفتار $P(x)$

$$P = x^\nu \int_1^\infty (t^2-1)^{\nu-1/2}\, e^{-xt/2}\, dt$$

تغییر متغیر : $t = 1 + \dfrac{u}{x} \Longrightarrow dt = \dfrac{1}{x}du \quad , \quad xt = x+u$

$\longrightarrow t=1 \to u=0 \quad , \quad t=\infty \to u=\infty$

$$\longrightarrow P = x^\nu \int_0^\infty \left[(1+u/x)^2 - 1\right]^{\nu-1/2} e^{-(x+u)}\, \frac{1}{x}\, du$$

$$\left[u^2/x^2 + 2u/x\right]^{\nu-1/2} = \left(\frac{u^2}{x^2}\right)^{\nu-1/2}\left[1 + \frac{2x}{u}\right]^{\nu-1/2}$$

$x\longrightarrow 0 : \quad e^{-x} \simeq 1 \quad , \quad \left[1+\dfrac{2x}{u}\right]^{\nu-1/2} = 1$

$$\Longrightarrow P = x^{\nu-1}\int_0^\infty \left(\frac{u}{x}\right)^{2\nu-1} e^{-u}\, du = \underbrace{x^{\nu-1}\,x^{-2\nu+1}}_{x^{-\nu}} \underbrace{\int_0^\infty u^{2\nu-1} e^{-u}\, du}_{\Gamma(2\nu)}$$

یادآوری : $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^\infty u^{z-1} e^{-u}\, du \quad , \quad \Gamma(2\nu) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\Gamma(\nu)\,\Gamma(\nu+1/2)$

$$①,②,③ \Longrightarrow \cancel{x^{-\nu}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\cancel{2}}\,\cancel{\Gamma(\nu)}\,\Gamma(\nu+1/2) = B\,\frac{\cancel{\Gamma(\nu)}\,2^{\nu-\cancel{1}}}{\cancel{x^{\nu}}} \Longrightarrow B = \sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)\,2^\nu$$

$$\Longrightarrow ① : \quad K_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\, \overset{(x/2)^\nu}{2^{-\nu}\,x^\nu} \int_1^\infty (t^2-1)^{\nu-1/2}\, e^{-xt/2}\, dt \quad ✓$$