جلسه چهارم: توابع بسل و نویمان — تابع مولد توابع بسل — نمایش انتگرالی توابع بسل — روابط بازگشتی توابع بسل

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0 \longrightarrow y=\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda} \longrightarrow \text{معادله اندیسی}: k=\mp\nu$$

$$y=J_\nu(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^\lambda \frac{1}{\lambda!\,\Gamma(\nu+\lambda+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+\nu}$$

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^\lambda \frac{1}{\lambda!\,\Gamma(-\nu+\lambda+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-\nu}$$

قضیه 1: وقتی (عدد صحیح) $\nu=n$، $J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$

اثبات: $n>0$:

$$J_{-n}(x)=\sum_{\cancel{\lambda=0}\ \lambda=n}^{\infty}(-1)^\lambda \frac{1}{\lambda!\,\Gamma(\underbrace{-n+\lambda+1})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}$$

این باید عدد مثبت باشد: $-n+\lambda+1>0 \Longrightarrow \lambda>n-1$

تغییر شمارنده: $\lambda-n=\lambda' \rightsquigarrow \lambda=n \equiv \lambda'=0$

$$J_{-n}(x)=\sum_{\lambda'=0}^{\infty}\underbrace{(-1)^{\lambda'+n}}_{(-1)^n\,(-1)^{\lambda}} \frac{1}{\boxed{(\lambda'+n)!\,\Gamma(\lambda'+1)}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(\lambda'+n)-n=2\lambda'+n}$$

مقایسه با $J_n(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^\lambda \frac{1}{\boxed{\lambda!\,\Gamma(n+\lambda+1)}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+n}$

$\Longrightarrow J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$ *

باید نشان دهیم: $\lambda!\,\Gamma(n+\lambda+1)=\underbrace{(\lambda+n)!}\,\Gamma(\lambda+1)$

$\lambda!\,(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+n)$

Functional eq. $z\Gamma(z)=\Gamma(z+1)$

اگر $n<0$: $p=-n \leftarrow p>0$:

$*: J_p(x)=(-1)^{-p}J_{-p}(x) \Longrightarrow J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$

نتیجه: اگر $J_\nu(x)$ و $J_{-\nu}(x)$ جوابهای مستقل باشند، جواب کلی معادله بسل: $AJ_\nu(x)+BJ_{-\nu}(x)$

قضیه ۲: برای کلیه مقادیر ν، جوابهای مستقل معادله بسل را می‌توان به صورت زیر انتخاب نمود: $J_\nu(x)$, $N_\nu(x)$

تابع نویمان مرتبه ν : $N_\nu(x) = \dfrac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$

*نکته: اگر $\nu = n$، تعریف بالا اصلاح می‌شود:

$$N_n(x) = \lim_{p\to n} \frac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi} = \lim_{p\to n} N_p$$

الف- اگر ν عدد غیر صحیح باشد:

$$\sin\nu\pi \neq 0 \quad , \quad \cos\nu\pi \neq 0 \Longrightarrow N_\nu(x) = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x)$$

ب- اگر $\nu = n$ یک عدد صحیح باشد.

$$\sin n\pi = 0 \quad , \quad \cos n\pi = (-1)^n$$

$$N_n(x) = \frac{J_n(x)(-1)^n - \overbrace{J_{-n}(x)}^{(-1)^n J_n(x)}}{0} = \frac{0}{0}$$

$$N_n(x) = \lim_{p\to n} \frac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi} = \left.\frac{\frac{\partial}{\partial p}J_p(x)\cos p\pi + J_p(x)\overbrace{\frac{\partial}{\partial p}\cos p\pi}^{-\pi\sin p\pi} - \frac{\partial}{\partial p}J_{-p}(x)}{\frac{\partial}{\partial p}\sin p\pi = \pi\cos p\pi}\right|_{p=n}$$

قاعده هوپیتال

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial p}J_p(x) - \frac{1}{\underbrace{\cos p\pi}_{(-1)^p}}\frac{\partial}{\partial p}J_{-p}(x)\right\}\Bigg|_{p=n} \qquad (I)$$

اول نشان می‌دهیم، تابع نویمان در معادله بسل صدق می‌کند:

$$x^2\frac{d^2 J_p}{dx^2} + x\frac{dJ_p}{dx} + (x^2 - p^2)J_p(x) = 0$$

$$\Big\downarrow \partial/\partial p$$

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial J_p}{\partial p} + x\frac{d}{dx}\frac{\partial J_p}{\partial p} + (-2p)J_p(x) + (x^2 - p^2)\frac{\partial J_p}{\partial x} = 0$$

همین کار برای $J_{-p}(x)$:

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial J_{-p}}{\partial p} + x\frac{d}{dx}\frac{\partial J_{-p}}{\partial p} + (-2p)J_{-p}(x) + (x^2 - p^2)\frac{\partial J_{-p}}{\partial x} = 0 \xrightarrow{\times(-1)^p}$$

و از معادله اول کم می‌کنیم

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}\Bigg\{\underbrace{\frac{\partial J_p}{\partial p} - (-1)^p\frac{\partial J_{-p}}{\partial p}}_{\pi N_p(x)}\Bigg\} + x\frac{d}{dx}\Bigg\{\frac{\partial J_p}{\partial p} - (-1)^p\frac{\partial J_{-p}}{\partial p}\Bigg\} - 2p\Big\{J_p - (-1)^p \overbrace{J_{-p}}^{(-1)^p J_p(x)}\Big\}$$

$$+(x^2-p^2)\left\{\frac{\partial J_p}{\partial p}-(-1)^p\frac{\partial J_{-p}}{\partial p}\right\}=0 .$$

$$\xrightarrow{p=n} x^2\frac{d^2}{dx^2}N_n(x)+x\frac{d}{dx}N_n(x)+(x^2-p^2)N_n(x)=0 \quad \checkmark$$

تابع $J_n(x)$ در $x=0$ متناهی و تابع $N_n(x)$ در $x=0$ نامتناهی است

پس این دو تابع از هم مستقل هستند.

* تمرین (قضیه ۳) عبارت زیر عبارتی صریح برای $N_n(x)$ است (n عدد صحیح است)

ثابت اویلر

$$N_n(x)=\frac{2}{\pi}\left\{\ln\frac{x}{2}+\gamma-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r}\right\}J_n(x)$$

قضیه ۴: اگر n عددی صحیح باشد: $N_{-n}(x)=(-1)^n N_n(x)$

$$(I):\quad N_n(x)=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial p}J_p(x)-(-1)^p\frac{\partial}{\partial p}J_{-p}(x)\right\}\Bigg|_{p=n}$$

$$N_{-n}(x)=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial p}J_p(x)-(-1)^p\frac{\partial}{\partial p}J_{-p}(x)\right\}\Bigg|_{p=-n}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial(-p)}J_{-p}(x)-(-1)^{-p}\frac{\partial}{\partial(-p)}J_p(x)\right\}\Bigg|_{p=n}$$

$$=(-1)^n\underbrace{\frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\partial}{\partial p}J_{-p}(x)(-1)^p+\frac{\partial}{\partial p}J_p(x)\right\}}_{N_n(x)}\Bigg|_{p=n}\Longrightarrow N_{-n}(x)=(-1)^n N_n(x)$$

تابع مولد توابع بسل

قضیه ۵: برای هر $t\neq 0$ داریم:

$$\underbrace{e^{\frac{1}{2}x(t-\frac{1}{t})}}_{g(x,t)\,:\,\text{تابع مولد}}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}t^nJ_n(x)$$

$$\sum_{-\infty}^{-1}+\sum_{0}^{+\infty}$$

اثبات: الف - $n\geq 0$

$$e^{\frac{1}{2}x(t-\frac{1}{t})}=e^{\frac{1}{2}xt}\,e^{-\frac{1}{2}\frac{x}{t}}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}xt)^s}{s!}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2}\frac{x}{t})^r}{r!}$$

$$=\sum_{r,s=0}^{\infty}(-1)^r\left(\frac{1}{2}\right)^{s+r}\frac{x^{r+s}\,t^{s-r}}{s!\,r!}\Longrightarrow s-r=n\Longrightarrow r=s-n$$

$$r\geq 0\Longrightarrow s-n\geq 0$$

$$\Longrightarrow s\geq n$$

ضریب t^n : $\displaystyle\sum_{s=n}^{\infty} (-1)^{s-n} (1/2)^{2s-n} \frac{x^{2s-n}}{s!\,(s-n)!}$

یادآوری : $\Gamma(z+1) = z!$

تغییر شمارنده : $p = s-n \longrightarrow s=n \equiv p=0$

ضریب t^n : $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p} (1/2)^{2(p+n)-n} \frac{x^{2(p+n)-n} = 2p+n}{(p+n)!\,p!} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n} \frac{1}{p!\,(p+n)!}$ $\quad \Gamma(p+n+1)$

t^n ضریب $= J_n(x)$

ب - $n<0$

ضریب t^n : $\displaystyle\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{s-n} (1/2)^{2s-n} \frac{x^{2s-n}}{s!\,(s-n)!}$

$r = s-n \;,\; r \geq 0 \implies s \geq n \xrightarrow{n<0} s \geq 0$

ضریب t^n $= \displaystyle(-1)^n \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{s} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-n} \frac{1}{s!\,(s-n)!} = (-1)^n J_{-n}(x) = J_n(x)$

$\Gamma(s-n+1)$ $\quad (-1)^n J_n(x)$

نمایش انتگرالی توابع بسل

قضیه : برای هر عدد صحیح n داریم :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)\,d\theta$$

$n \to -n$

$$e^{\frac{1}{2}x(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{-1} + (n=0) + \sum_{n=1}^{+\infty}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} t^{-n} J_{-n}(x) + J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} t^n J_n(x)$$

$(-1)^n J_n(x)$

$$e^{\frac{1}{2}x(t-1/t)} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) \left\{ \frac{(-1)^n}{t^n} + t^n \right\}$$

تغییر متغیر : $t = e^{i\theta} \implies 1/t = e^{-i\theta}$

$$\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin\theta$$

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta$$

$$e^{\frac{1}{2}x\underbrace{\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)}_{\cancel{2}i\sin\theta}} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\left\{ e^{ni\theta} + (-1)^n e^{-in\theta} \right\}$$

if n : even $\longrightarrow e^{ni\theta} + \underbrace{(-1)^n}_{1} e^{-ni\theta} = 2\cos n\theta$

if n: odd $\longrightarrow e^{ni\theta} + \underbrace{(-1)^n}_{-1} e^{-ni\theta} = 2i\sin n\theta$

$$\rightarrow \underbrace{e^{xi\sin\theta}}_{\cos(x\sin\theta)+i\sin(x\sin\theta)} = J_0(x) + \sum_{K=1}^{\infty} J_{2K}\, 2\cos(2K\theta) + \sum_{K=1}^{\infty} J_{2K-1}\, 2i\sin\left[(2K-1)\theta\right]$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \cos(x\sin\theta) = J_0(x) + 2\sum\limits_{K=1} J_{2K}(x)\cos(2K\theta) \quad (1) \xrightarrow{x\cos n\theta} \cdots \\ \sin(x\sin\theta) = 2\sum\limits_{K=1} J_{2K-1}(x)\sin\left[(2K-1)\theta\right] \quad (2) \xrightarrow{x\sin n\theta} \cdots \end{cases}$$

شرط $(n \neq 0)$

$$\int_0^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta \, d\theta = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi/2 & m = n \neq 0 \\ \pi & m = n = 0 \end{cases} , \quad \int_0^{\pi} \sin m\theta \sin n\theta \, d\theta = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi/2 & m = n \neq 0 \end{cases}$$

رابطه (1) :

$$\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\cos n\theta \, d\theta = J_0(x)\underbrace{\int_0^{\pi}\cos n\theta \, d\theta}_{0} + 2\sum_{K=1} J_{2K}(x)\underbrace{\int_0^{\pi}\cos(n\theta)\cos(2K\theta)\,d\theta}_{\pi/2\,\delta_{n,2K}}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ \cancel{2}\sum\limits_{K} J_{2K}(x) \times \pi/\cancel{2}\; \delta_{n,2K} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد :} \end{cases}$$

رابطه (2) :

$$\int_0^{\pi} \sin(x\sin\theta)\sin n\theta \, d\theta = 2\sum J_{2K-1}(x)\underbrace{\int_0^{\pi}\sin n\theta \sin\left[(2K-1)\theta\right] d\theta}_{\pi/2\,\delta_{n,2K-1}} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \cancel{2}\sum J_{2K-1} \times \pi/\cancel{2}\; \delta_{n,2K-1} & \text{: } n \text{ فرد} \end{cases}$$

دو رابطه بالا را جمع می‌کنیم ؛

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

$$\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta-n\theta)\,d\theta=\underbrace{\pi J_n(x)}_{n\ \text{زوج}}+\underbrace{\pi J_n(x)}_{n\ \text{فرد}}=\pi J_n(x)\ \checkmark$$

روابط بازگشتی

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\nu}J_{\nu}(x)\right)=x^{\nu}J_{\nu-1}(x)\quad (A)$$

اثبات :

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{\lambda=0}^{\infty}x^{\nu}(-1)^{\lambda}\frac{1}{\lambda!\,\Gamma(\nu+\lambda+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+\nu}\right]$$

$$x^{2\lambda+2\nu}$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\frac{1}{\lambda!\,\Gamma(\nu+\lambda+1)}\frac{1}{2^{2\lambda+\nu-1}}\underbrace{(2\lambda+2\nu)}_{\cancel{2}\cancel{(\lambda+\nu)}}x^{2\lambda+2\nu-1}$$

$$\Gamma(\nu+\lambda+1)=\cancel{(\lambda+\nu)}\,\Gamma(\lambda+\nu)$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\frac{1}{\lambda!\,\Gamma(\lambda+\nu)}x^{\nu}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+\nu-1}=x^{\nu}J_{\nu-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu}J_{\nu}(x)\right)=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)\quad (B)\ \rightsquigarrow$$

* به عنوان تمرین اثبات شود

$$J'_{\nu}(x)=J_{\nu-1}(x)-\frac{\nu}{x}J_{\nu}(x)$$

$$(A):\ \frac{d}{dx}\left(x^{\nu}J_{\nu}\right)=x^{\nu}J_{\nu-1}\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{\nu\cancel{x^{\nu-1}}}{\cancel{x^{\nu}}}J_{\nu}(x)+\frac{\cancel{x^{\nu}}J'_{\nu}}{\cancel{x^{\nu}}}=\frac{\cancel{x^{\nu}}J_{\nu-1}}{\cancel{x^{\nu}}}\qquad x^{-1}$$

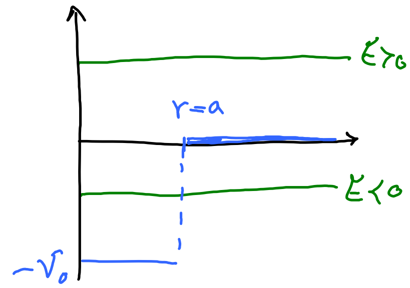
$$\to J'_{\nu}(x)=J_{\nu-1}(x)-\frac{\nu}{x}J_{\nu}(x)\ \checkmark$$

$$J'_{\nu}(x)=\frac{\nu}{x}J_{\nu}(x)-J_{\nu+1}$$

$$(B)\to(-\nu)\cancel{x^{-\nu-1}}J_{\nu}(x)+\cancel{x^{-\nu}}J'_{\nu}(x)=-\cancel{x^{-\nu}}J_{\nu+1}(x)\to J'_{\nu}(x)=-J_{\nu+1}(x)+\frac{\nu}{x}J_{\nu}(x)$$

$$J'_\nu(x) = \frac{1}{2}\left[J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)\right] \longleftarrow$$ از جمع دو رابطه قبل

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) \longleftarrow$$ از تفریق دو رابطه قبل



توابع هنکل

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + i N_\nu(x)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - i N_\nu(x)$$