جلسه سوم : معادلات دیفرانسیل ← مفاهیم اولیه

مرتبه اول

مرتبه دوم

نقاط تکین

حل معادله بل به روش سری

معادلات دیفرانسیل

PDE : partial differential equation

ODE : ordinary 〃 〃

مرتبه (order) : مرتبه بالاترین مشتق

صورت کلی : $\mathcal{L}\psi = F \rightarrow$ source

$\mathcal{L}$ ← اپراتور

ψ ← جواب

اپراتورها یا معادلات دیفرانسیل خطی :

$$\mathcal{L}(a\psi_1 + b\psi_2) = a\mathcal{L}\psi_1 + b\mathcal{L}\psi_2$$

$$\mathcal{L} = (d/dx)^2$$

مثال : $\nabla^2\psi = 0$: PDE

2nd order

homogenous

معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x,y)u = R(x,y)$$

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = R(x,y)$$

$B^2 - 4AC > 0$: hyperbolic

$B^2 - 4AC = 0$: parabolic

$B^2 - 4AC < 0$: elliptic

معادله دیفرانسیل غیرخطی

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \underbrace{C(\psi)}_{\text{سرعت انتشار موج}}\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$$

KDV معادله : $\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} = 0$

$$\xi = x - ct$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{d\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} = -C\, d\psi/d\xi$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{d\psi}{d\xi} \quad , \quad \frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} = \frac{d^3\psi}{d\xi^3}$$

$$\Rightarrow (-C+\psi)\frac{d\psi}{d\xi} + \frac{d^3\psi}{d\xi^3} = 0 \xrightarrow{\times d\psi/d\xi}$$

$$2\psi'\psi'' = 2C\psi\psi' - \psi^2\psi'$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} (\varphi')^2 = c\varphi^2 - \varphi^3/3 + \alpha \longrightarrow \varphi(\xi) = \frac{3c}{\cosh^2(\sqrt{c}\,\xi/2)}$$

نقاط تکین

ODE مرتبه دوم : $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

معادله دیفرانسیل بسل : $x^2y'' + xy' + (x^2-n^2)y = 0$

لاگر " " : $xy'' + (1-x)y' + \alpha y = 0$

وابسته لاگر " " : $xy'' + (1+k-x)y' + \alpha y = 0$

هرمیت " " : $y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0$

چبیشف " " : $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$

لژاندر " " . $(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0$

اگر برای $x = x_0$ ، $P(x)$ و $Q(x)$ متناهی شوند ، x_0 یک نقطه معمولی است .

" " $x = x_0$ ، " " نامتناهی " ، x_0 یک نقطه تکین است . { منتظم / نامنتظم

الف - اگر به ازای $x \to x_0$ ، $P(x)$ یا $Q(x)$ واگرا شود اما $(x-x_0)P(x)$ و $(x-x_0)^2Q(x)$ متناهی باشند ، نقطه x_0 یک نقطه تکین منتظم یا غیراساسی است .

ب - اگر $P(x)$ سریعتر از $\frac{1}{x-x_0}$ واگرا شود به طوری که وقتی $x \to x_0$ ، $P(x)(x-x_0)$ نامتناهی شود

یا $Q(x)$ سریعتر از $\frac{1}{(x-x_0)^2}$ واگرا شود " " " ، $Q(x)(x-x_0)^2$ " " ،

در این صورت x_0 یک نقطه تکین نامنتظم یا اساسی است .

مثال : معادله بسل :

$$y'' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{P(x)}y' + \underbrace{\left(1 - n^2/x^2\right)}_{Q(x)}y = 0 \xleftarrow{\div x^2} x^2y'' + xy' + (x^2-n^2)y = 0$$

$x_0 = 0$: نقطه تکین منتظم

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)P(x) = x\frac{1}{x} = 1 \;;\; \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2Q(x) = \cancel{x^2}\,\frac{x^2-n^2}{\cancel{x^2}} = -n^2$$

اگر x_0 نقطه متناهی نباشد، روش کار به این صورت است:

$\frac{1}{x} = z$: تغییر متغیر $\longrightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2} = -z^2$

$x \to \infty \equiv z \to 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = -z^2 \, dy/dz$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \overset{-z^2}{\boxed{\frac{dz}{dx}}}\frac{d}{dz}\left(-z^2 dy/dz\right) = +z^2\left(+2z\, dy/dz + z^2\, d^2y/dz^2\right)$$

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0 \Longrightarrow z^4 \frac{d^2y}{dz^2} + \left[2z^3 - z^2 P(z^{-1})\right]\frac{dy}{dz} + Q(z^{-1})\,y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left[\frac{2z^3 - z^2 P(z^{-1})}{z^4}\right]\frac{dy}{dz} + \frac{Q(z^{-1})}{z^4}\,y = 0$$

مثال: بررسی کنید در معادله بسل آیا نقطه $x \to \infty$ نقطه تکین است؟

$$P(x) = \frac{1}{x}, \quad Q(x) = \frac{x^2 - n^2}{x^2}$$

$$\frac{2z^3 - z^2 P(z^{-1})}{z^4} = \frac{2z^3 - z^2 \cdot z}{z^4} = \frac{1}{z}$$

$$\frac{Q(z^{-1})}{z^4} = \frac{(1/z^2 - n^2)\,z^2}{z^4} = \frac{1 - n^2 z^2}{z^4}$$

نقطه $z_0 = 0$، روابط بالا را نامتناهی می‌کند.

$(z - z_0) \times \frac{1}{z} = z \times 1/z = 1$: متناهی در $z_0 = 0$

$(z - z_0)^2 \times \frac{1 - n^2 z^2}{z^4} = (1 - n^2 z^2)/z^2$: نامتناهی $z_0 = 0$ در $\longrightarrow$ $z_0 = 0$ $(x_0 \to \infty)$ تکین نامنظم است.

مثال: نقاط تکینی معادله لژاندر : $(1 - x^2)\,y'' - 2x\,y' + l(l+1)\,y = 0$

نقاط تکین $\boxed{x_0 = \mp 1} \longleftarrow y' - \frac{2x}{1 - x^2}\,y' + \frac{l(l+1)}{1 - x^2}\,y = 0$

$$\lim_{x \to x_0}(x - x_0)\,P(x) = \lim_{x \to 1}(\cancel{x - 1})\frac{+2x}{1 - x^2 = (\cancel{1 - x})(1 + x)} = \lim_{x \to 1}\frac{2x}{1 + x} = 1$$

$$\lim_{x \to x_0}(x - x_0)^2\,Q(x) = \lim_{x \to 1}(x - 1)^{\cancel{2}}\frac{-l(l+1)}{(\cancel{1 - x})(1 + x)} = \frac{-l(l+1)}{2}$$

$\longrightarrow$ نقاط $x = \mp 1$ تکین منظم هستند.

$$\frac{dy}{dz}\ \text{ضریب}:\ \frac{2z-P(z^{-1})}{z^2}=\frac{2z-\frac{2(1/z)}{1-(1/z)^2}}{z^2}=\frac{2(z^2-2)}{z(z^2-1)}$$

$\longrightarrow$ $z_0=0$ نقطه تکین است.

$$\frac{d^2y}{dz^2}\ \text{ضریب}:\ \frac{Q(z^{-1})}{z^4}=\frac{\frac{l(l+1)}{1-(1/z)^2}}{z^4}=\frac{l(l+1)}{z^2(z^2-1)}$$

$$\lim_{z\to0}\cancel{z}\,\frac{2z(z^2-2)}{\cancel{z}(z^2-1)}=0$$

$\longrightarrow$ تکین منتظم: $z_0=0$ $(x_0\to\infty)$

$$\lim_{z\to0}\cancel{z^2}\,\frac{l(l+1)}{\cancel{z^2}(z^2-1)}=-l(l+1)$$

فصل 11: توابع بسل

$$x^2y''-xy'+(x^2-\nu^2)y=0\longrightarrow y(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{k+\lambda}$$

$$x^2\sum_{\lambda=0}^{\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)a_\lambda x^{k+\lambda-2}-x\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{k+\lambda-1}(k+\lambda)+(x^2-\nu^2)\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{k+\lambda}=0$$

<u>یادآوری</u>: f_1 و f_2 و ..... f_n درصورتی مستقل خطی هستند که:

wronskian

$$W=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & & f_n^{(n-1)}\end{vmatrix}$$

اگر W در همه نقاط برابر صفر باشد، توابع f_i وابسته خطی هستند.

اگر W " " " غیرصفر " " " مستقل خطی هستند.

اگر W در بعضی نقاط صفر و در بعضی نقاط دیگر غیرصفر باشد، تست رانسکین جواب نمی‌دهد.

مثال: sin x و cos x مستقل خطی هستند.

$$W=\begin{vmatrix}\sin x & x \\ \cos x & -\sin x\end{vmatrix}=-\sin^2 x-\cos^2 x=-1\neq0$$

e^{ix} و sin x و cos x وابسته خطی هستند.

$$W=\begin{vmatrix} e^{ix} & \sin x & \cos x \\ ie^{ix} & \cos x & -\sin x \\ -e^{-ix} & -\sin x & -\cos x\end{vmatrix}=0$$

استقلال e^x و cos x را نمی‌توان از تست رانسکین متوجه شد.

$$W=\begin{vmatrix} e^x & \cos x \\ e^x & -\sin x\end{vmatrix}=-e^x(\sin x+\cos x)$$

توابع $x^0=1$ ، x ، x^2 ، x^3 ، .... مستقل خطی هستند.

اگر $\alpha_0 x^0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\dots+\alpha_n x^n=0$

$$\rightarrow \alpha_0=\alpha_1=\dots=\alpha_n=0$$

برگردیم به مسأله خودمان

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}\left\{\underbrace{a_\lambda(k+\lambda)(k+\lambda-1)}_{\lambda=0 \text{ در سری اول}}+\underbrace{a_\lambda(k+\lambda)-a_\lambda\nu^2}_{\lambda=1 \text{ در سری اول}}\right\}x^{k+\lambda}+\underbrace{\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{k+\lambda+2}}=0 \quad ①$$

$$a_0\left\{(k)(k-1)+k-\nu^2\right\}x^k+a_1\left\{(k+1)(k)+(k+1)-\nu^2\right\}x^{k+1}+$$

$$a_2\left\{(k+2)(k+1)+(k+2)-\nu^2+a_0\right\}x^{k+2}+\dots=0$$

که از جمله دوم ظاهر می‌شود

چون توابع توانهای x از هم مستقل هستند پس تک تک ضرایب باید صفر شود.

$$a_0\left\{k(k-1),k-\nu^2\right\}=0 \xrightarrow{\text{فرض } a_0\neq0} k^2-\nu^2=0 \ :\ \text{معادله اندیسی} \Rightarrow k=\mp\nu$$

$$a_1\left\{k(k+1)+(k+1)-\nu^2\right\}=0 \longrightarrow a_1\left\{(k+1)^2-\nu^2\right\}=0 \Longrightarrow a_1\left\{\underbrace{(\mp\nu+1)^2-\nu^2}_{\neq0}\right\}=0 \Rightarrow \boxed{a_1=0}$$

در سری دوم : $\lambda+2=\lambda'$ → $\lambda=\lambda'-2$

$\lambda=0 \longrightarrow \lambda'=2$

① سری دوم : $\sum_{\lambda'=2}^{\infty}a_{\lambda'-2}x^{k+\lambda'}$

① سری اول : $\lambda=\lambda'$

نکته: $\lambda'=0$ و $\lambda'=1$ در سری اول بررسی شده‌اند (معادله اندیسی و $a_1=0$) پس در سری اول می‌توان λ' را از ۲ شروع کرد.

$$\Rightarrow \sum_{\lambda'=2}^{\infty}\left\{a_{\lambda'}(k+\lambda')(k+\lambda'-1)+a_{\lambda'}(k+\lambda')-a_{\lambda'}\nu^2+a_{\lambda'-2}\right\}x^{k+\lambda'}=0$$

$$\rightarrow a_\lambda\left\{\overbrace{(k+\lambda)(k+\lambda-1)+(k+\lambda)}^{(k+\lambda)^2}-\nu^2\right\}+a_{\lambda-2}=0 \ :\ \text{رابطه بازگشتی}$$

$$\boxed{k=+\nu} \Rightarrow a_\lambda=\frac{-a_{\lambda-2}}{(\lambda+\nu)^2-\nu^2=\lambda(\lambda+2\nu)} \quad \lambda\geq2$$

→ چون $a_1=0$ → $a_{\text{فرد}}=0$

$\lambda=2:$

$$a_2=\frac{-a_0}{2(2+2\nu)}, \quad \lambda=4:\ a_4=\frac{-a_2}{4(4+2\nu)}=\frac{a_0}{16(4+2\nu)(1+\nu)}$$

$$4(1+\nu) \qquad\qquad 32(\nu+2)(\nu+1)$$

$$a_{2\lambda} = (-1)^{\lambda} \frac{a_0}{2^{2\lambda}\lambda!\,(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+\lambda)} \times \frac{\overset{\Gamma(\nu+1)=\nu!}{\Gamma(\nu+1)}}{\Gamma(\nu+1)} = \Gamma(\nu+\lambda+1) = (\nu+1)!$$

داشتیم: $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$

$$\longrightarrow y(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{2\lambda}\, x^{k+2\lambda} \xrightarrow{k=\nu} y(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_0 (-1)^{\lambda} \frac{\Gamma(\nu+1)}{2^{2\lambda}\lambda!\,\Gamma(\nu+\lambda+1)} x^{2\lambda+\nu}$$

دلخواه : $a_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$ انتخاب

تابع بسل

$$\Longrightarrow J_\nu(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} \frac{1}{\lambda!\,\Gamma(\nu+\lambda+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+\nu}$$

$$\boxed{k=-\nu} \longrightarrow J_{-\nu}(\ ) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} \frac{1}{\lambda!\,\Gamma(-\nu+\lambda+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-\nu}$$

*نکته : اگر معادله اندیسی فقط یک جواب داشته باشد ، از این روش فقط یک جواب بدست میآوریم.

اگر مجموع ریشه‌های معادله اندیسی برابر یک عدد غیر صحیح باشد ، محال است دو جواب مستقل داشته باشیم.

〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 صحیح باشد ، فقط یک جواب داریم.

$k = \mp\nu$

$k_1 + k_2 = 2\nu$