جلسه اول : فصل 9 : تابع "گاما" ← تعریف حد نامتناهی
تعریف حاصل ضرب نامتناهی
انتگرال معین
صورتهای دیگر تابع "گاما"
اتحادها و روابط
تابع بتا
فرمول دوبرابر کردن لژاندر

تعریف اول : حد نامتناهی اویلر

$$\Gamma(z) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n}{z(z+1)\cdots(z+n)}\, n^{z} \longrightarrow z \neq 0, -1, -2, \dots, -n$$

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n \times z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n+1)}\, n^{z+1} = \Gamma(z)\lim_{n\to\infty}\frac{nz}{n+z+1} = z\,\Gamma(z)$$

$$\Longrightarrow \; * \; \boxed{\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)} \quad \text{functional equation}$$

* تمرین : رابطه مقابل برای z های غیرصحیح منفی برقرار است .

$$\Gamma(z+2) = (z+1)\Gamma(z+1) = z(z+1)\Gamma(z) \longrightarrow \Gamma(z+n) = (z)_n\,\Gamma(z)$$

$$\text{pochhammer symbol} \longleftarrow (z)_n = z(z+1)\cdots(z+n)$$

$$\Gamma(1) = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdots}(1+n)}\, n^{1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+n} = 1 \Longrightarrow \Gamma(1) = 1$$

$$*:\ \Gamma(2) = 1\cdot\Gamma(1) = 1$$

$$*:\ \Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\,\Gamma(2) = 2$$

$$\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!}$$

تعریف دوم : حاصل ضرب نامتناهی وایرشتراوس (weierstrass)

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \equiv z\, e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}$$

$$\gamma = 0.5577216\ldots \rightsquigarrow \text{Euler\_Mascheroni Const.}$$

$$\Gamma(1) = 1 \xrightarrow{z=1} 1 = e^{\gamma}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+1/n\right)e^{-1/n}$$

اثبات هم ارزی

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot \cancel{\cdots}\, n}{z(z+1)\cdots(z+n)}\, n^{z}$$

$$z(z+1)\cdots(z+n) = z(z+1)\left(1+z/2\right)\cdots\left(1+z/n\right)\times \cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}$$

$$\Longrightarrow \Gamma(z) = \frac{1}{z}\lim_{n\to\infty} n^{z}\prod_{m=1}^{n}\left(1+z/m\right)^{-1}$$

$$n^{-z} = \left(e^{-\ln n}\right)^{z} = e^{-z\ln n}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \lim_{n\to\infty} e^{-z\ln n} \prod_{m=1}^{n} (1+z/m) \times \frac{\prod_{m=1}^{n} e^{z/m}}{\prod_{m=1}^{n} e^{z/m}} \qquad \prod_{m=1}^{n} e^{z/m} = e^{(z+z/2+\cdots+z/n)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Gamma(z)} = z \lim_{n\to\infty} \left\{ e^{z(1+1/2+\cdots 1/n-\ln n)} \prod_{m=1}^{n} e^{-z/m}(1+z/m) \right\}$$

$$= z \overbrace{\lim_{n\to\infty} \left\{ e^{z(1+1/2+\cdots 1/n-\ln n)} \right\}}^{e^{\gamma z}} \prod_{m=1}^{\infty} e^{-z/m}(1+z/m) \quad \checkmark$$

تعریف سوم : انتگرال معین اویلر

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt \qquad Re\, z > 0 \longrightarrow$$ برای همگرایی انتگرال لازم است.

فرض کنیم : $z = x$

خیلی کوچک

در حد پایین : $t \simeq 0 \longrightarrow e^{-t} \simeq 1 \Rightarrow \Gamma(x) = \underbrace{\int_0^c t^{x-1} dt}_{\frac{1}{x} t^x \big|_0^c} + \int_c^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$

باید $x > 0$ که حد پایین همگرا باشد

اثبات هم ارزی

① تعریف می‌کنیم : $F(n,z) \equiv \int_0^n (1-t/n)^n t^{z-1} dt \qquad Re\, z > 0, \; n: \text{integer}$

$$e^{-t} \equiv \lim_{n\to\infty} (1-t/n)^n = \lim_{n\to\infty} \left\{ 1 + \cancel{n}(-t/\cancel{n}) + \frac{1}{2!}(-t/\cancel{n})^2 \cancel{n(n-1)} + \cdots \right\} = 1 - t + \frac{(-t)^2}{2!} + \cdots$$

یادآوری : $(a+b)^n = a + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \cdots + b^n$

$$\lim_{n\to\infty} F(n,z) = \int_0^n e^{-t} t^{z-1} dt \quad :$$ تعریف سوم

انتگرال رابطه ① را محاسبه می‌کنیم.

$t/n \equiv u \longrightarrow t=0 \equiv u=0, \; t=n \equiv u=1$

$\longrightarrow t = nu, \quad dt = n\,du$

$$F(n,z) = \int_0^1 (1-u)^n n^{z-1} u^{z-1} n\, du = n^z \int_0^1 \underbrace{(1-u)^n}_{f} \underbrace{u^{z-1}}_{g'} du$$

$$f' = n(1-u)^{n-1} \longleftarrow f \qquad g' \longrightarrow g = \frac{1}{z} u^z$$

$$= n^z \left\{ \cancel{(1-u)^n \frac{1}{z} u^z \Big|_0^1}^{\,0} + \int_0^1 n(1-u)^{n-1} \frac{1}{z} u^z du \right\} = n^z \frac{n}{z} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^z du$$

$$F(n,z) = n^z \frac{n(n-1)\cdots 1}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \int_0^1 u^{z+n-1}\,du$$

از انتگرال جز به جز می‌گیریم :

$$\frac{1}{z+n} u^{z+n}\Big|_0^1 = \frac{1}{z+n}$$

$$\Rightarrow F(n,z) = n^z \frac{1\cdot 2 \cdots n}{z(z+1)\cdots(z+n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lim_{n\to\infty} F(n,z)$$

: تعریف دوم $\equiv$ تعریف اول

صورت‌های دیگر تابع گاما

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1}\,dt \qquad \mathrm{Re}\, z > 0$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt \qquad t = u^2 \rightarrow dt = 2u\,du$$

$$= \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2z-2}\, 2u\,du = 2\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2z-1}\,du \quad \checkmark$$

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left[\ln(1/t)\right]^{z-1} dt \qquad \mathrm{Re}\, z > 0$$

$$t = 0 \equiv y = 1$$

$$t = \infty \equiv y = 0$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt \qquad e^{-t} = y \rightarrow -e^{-t}dt = dy \rightarrow dt = \frac{-dy}{e^{-t}} = -\frac{dy}{y}$$

$$t = -\ln y = \ln 1/y$$

$$= -\int_{\cancel{1}\,0}^{\cancel{0}\,1} \cancel{y} \left[\ln 1/y\right]^{z-1} (-dy/\cancel{y}) = \int_0^1 \left[\ln 1/y\right]^{z-1} dy$$

قضیه: برای هر z غیرصحیح ارتباط مقابل را اثبات کنید.

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = \left[z \cancel{e^{\gamma z}} \prod_{m=1}^{\infty}(1+z/m)\cancel{e^{-z/m}}\right]\left[-z \cancel{e^{-\gamma z}} \prod_{m=1}^{\infty}(1-z/m)\cancel{e^{z/m}}\right]$$

$$\rightarrow \Gamma(z)\Gamma(-z) = -z^2 \prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - z^2/m^2\right) = \frac{-\pi}{z\sin \pi z} \quad \checkmark$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \longrightarrow \Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z) \rightarrow \Gamma(z)\Gamma(1-z) = -z\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

اگر $z = 1/2 \Rightarrow \Gamma(1/2)\Gamma(1/2) = \dfrac{\pi}{\sin \pi/2} = \pi \Rightarrow \boxed{\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}}$

تابع بتا

$$\beta(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \qquad \operatorname{Re}p>0\ ,\ \operatorname{Re}q>0$$

نشان دهید: $\beta(p,q)=\beta(q,p)$

اثبات: $\beta(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt=-\int_{\cancel{1}\,0}^{\cancel{0}\,1}(1-t')^{p-1}t'^{\,q-1}(-dt')=\int_0^1(1-t')^{p-1}t'^{\,q-1}dt'$

$1-t=t' \longrightarrow dt=-dt'$

$t=0 \equiv t'=1\ ,\ t=1\equiv t'=0$

$=\beta(q,p)$

صورت دیگر تابع بتا

$$t=\frac{s}{1+s}\longrightarrow dt=\frac{ds}{(1+s)^2}\ ,\ 1-t=\frac{1}{1+s}\longrightarrow \beta(p,q)=\int_0^\infty \frac{s^{q-1}}{(1+s)^{p+q}}ds$$

* تمرین :

$$\beta(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (\mathrm{I})$$

Legendre's duplicate formula فرمول دو برابر کردن لژاندر

$$\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{2}) \qquad \operatorname{Re}z>0$$

$$p=q=z \xrightarrow{(\mathrm{I})} \beta(z,z)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}dt$$

$1-t=\frac{1}{2}(1-s)$

$t=\frac{1}{2}(1+s)\longrightarrow dt=\frac{1}{2}ds$

$t=0\equiv s=-1\ ,\ t=1\equiv s=1$

$$=\int_{-1}^{+1}\frac{1}{2^{z-1}}(1+s)^{z-1}\frac{1}{2^{z-1}}(1-s)^{z-1}\,\tfrac{1}{2}ds$$

$$=\frac{2}{2^{2z-1}}\int_{\cancel{-1}\,0}^{+1}(1-s^2)^{z-1}ds=2^{-2z+2}\int_0^1(1-u)^{z-1}\frac{du}{2\sqrt{u}}=2^{-2z+1}\int_0^1(1-u)^{z-1}u^{-1/2}du$$

$s^2=u \longrightarrow 2s\,ds=du$

$\beta(p,q)=\int_0^1(1-t)^{q-1}t^{p-1}dt$

$$=2^{-2z+1}\beta(p=z,q=\tfrac{1}{2})\underset{(\mathrm{I})}{=}2^{-2z+1}\frac{\Gamma(z)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})}$$

$$\Longrightarrow \frac{\cancel{\Gamma(z)}\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}=2^{-2z+1}\frac{\cancel{\Gamma(z)}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})} \quad \Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi} \Longrightarrow \Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{2}) \quad (\mathrm{II})$$

تابع فاکتوریل

داریم : $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt \qquad Re\, z > 0$

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z}\, dt \equiv z! \qquad Re\, z > -1 \longrightarrow \Gamma(z) = (z-1)!$$

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z) \longrightarrow z! = z\,(z-1)! \longrightarrow 0! = 1$$

فرض کنید $z = x = \underset{\text{عدد صحیح}}{n}$ ، ثابت کنید

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{(2n)!\,\sqrt{\pi}}{2^{2n}\, n!}$$

$$\Gamma(2n) = (2n-1)! \qquad \Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\text{II} : \underbrace{\Gamma(2n)}_{(2n-1)!} = \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{\pi}}\, \underbrace{\Gamma(n)}_{(n-1)!}\, \Gamma(n+\tfrac{1}{2}) \longrightarrow \Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{\overbrace{2n\,(2n-1)!}^{(2n)!}}{\underbrace{2n\,(n-1)!}_{n!}}\; \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}}$$

$$\longrightarrow \Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{(2n)!\,\sqrt{\pi}}{n!\; 2^{2n}} \quad \checkmark$$

text book: Mathematical Methods for physicists by Arfken and weber
6th edition