جلسه یازدهم : روابط بازگشتی چندجمله‌ای های لژاندر   کره رسانا در میدان یکنواخت   اثبات یک سری روابط

حل مثال

1) $(l+1)P_{l+1}(x) - (2l+1)xP_l(x) + lP_{l-1}(x) = 0$

2) $P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) = (2l+1)P_l(x)$

تابع مولد : $g(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2-2tx+1}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x)$

$$\Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1 \cdot t}{\underbrace{\sqrt{t^2-2tx+1}}_{g(x,t)=\sum t^l P_l(x)}\,(t^2-2tx+1)} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l'(x)$$

$$\Longrightarrow (t^2-2tx+1)\sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l'(x) - \sum_{l=0}^{\infty} t^{l+1} P_l(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{l=0} t^{l+2}P_l'(x) \underbrace{- 2x\sum_{l=0} t^{l+1}P_l'(x) - \sum_{l=0}^{\infty} t^{l+1}P_l(x)}_{-\sum_{\cancel{l=0}\;l=1} t^{l+1}\left[+2xP_l' + P_l\right]} + \sum_{\cancel{l=0}\;\cancel{l=1}\;l=2} t^l P_l'(x) = 0$$

t^0 ضریب $= P_0'(x) = 0$

در جمله آخر است

یادآوری: $P_l(x) = \dfrac{1}{2^l\, l!}\dfrac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l \longrightarrow P_0(x) = 1 \;,\; P_1(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}(x^2-1) = x$

ضریب t^1 در دو جمله آخر $= -[2x\cancel{P_0'}^{\,0} + \underbrace{P_0}_{1}] + P_1' = -1 + 1 = 0$

توانهای t را در هر سه جمله یکسان می‌کنیم ،

بهمین ترتیب برای جمله دوم هم حساب می‌کنیم

جمله آخر $= \sum_{l=2} t^l P_l'(x) = \sum_{l'=0} t^{l'+2} P'_{l'+2}(x)$

$l-2 = l' \Rightarrow l = l'+2 \;;\; l=2 \equiv l'=0$

$$\Longrightarrow \sum_{l=0} t^{l+2}P_l'(x) - \sum_{l=0} t^{l+2}\left[2xP'_{l+1} + P_{l+1}\right] + \sum_{l=0} t^{l+2}P'_{l+2}(x) = 0$$

$$\Longrightarrow P_l'(x) - \left[2xP'_{l+1} + P_{l+1}\right] + P'_{l+2} = 0$$

$l+1 \to l \longrightarrow P'_{l-1} - [2x P'_l + P_l] + P_{l+1} = 0 \quad (*)$

1) $\xrightarrow{\text{مشتق}} (l+1) P'_{l+1} + l P'_{l-1} - (2l+1) P_l - (2l+1) x P'_l = 0 \quad (**)$

$(*) \times [-(2l+1)] + 2 \times (**) \Rightarrow P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) = (2l+1) P_l(x) \quad \checkmark$

3) $x P'_l(x) - P'_{l-1}(x) = l P_l(x)$

$** : (l+1) P'_{l+1} + l P'_{l-1} - (2l+1) P_l - (2l+1) x P'_l = 0$

از رابطه بازگشتی ۲، P'_{l+1} را جایگذاری می‌کنیم :

$(l+1)\{\underline{(2l+1)P_l(x)} + P'_{l-1}(x)\} + l P'_{l-1} - \underline{(2l+1)P_l} - (2l+1) x P'_l = 0$

$P_l(x)\,\cancel{(2l+1)}\{\underbrace{l+1-1}_{l}\} + P'_{l-1}\{\underbrace{l+1+l}_{2l+1}\} - \cancel{(2l+1)}\, x P'_l = 0$

$\longrightarrow l P(x) = x P'_l - P'_{l-1} \quad \checkmark$

4) $P'_l(x) - x P'_{l-1}(x) = l P_{l-1}(x)$

رابطه بازگشتی ۲ $\times x \Rightarrow x P'_{l+1} - x P'_{l-1} = \underbrace{(2l+1) x P_l}_{\text{از رابطه بازگشتی ۱}} = (l+1) P_{l+1} + l P_{l-1}$

در رابطه بازگشتی ۳ : $l \to l+1 \Rightarrow x P'_{l+1} - P'_l = (l+1) P_{l+1}$

دو رابطه را با هم کم می‌کنیم :

$-x P'_{l-1} + P'_l = l P_{l-1} \quad \checkmark$

5) $(x^2-1) P'_l(x) = l x P_l(x) - l P_{l-1}(x)$

رابطه بازگشتی ۳ $\times x$ − رابطه ۴ $\Rightarrow \left[x^2 P'_l - \cancel{x P'_{l-1}} - P'_l + \cancel{x P'_{l-1}}\right] = x P_l l - l P_{l-1}$

$(x^2-1) P'_l = l x P_l - l P_{l-1} \quad \checkmark$

6) $(x^2-1) P'_l(x) = (l+1) P_{l+1}(x) - (l+1) x P_l(x)$

رابطه بازگشتی ۳ : $l \to l+1 \Rightarrow x P'_{l+1} - P'_l = (l+1) P_{l+1}$

رابطه ۴ : $l \to l+1 \Rightarrow P'_{l+1} - x P'_l = (l+1) P_l \xrightarrow{\times x} \dots$

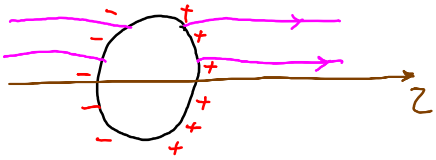
روابط بالا را از هم کم می‌کنیم :

$$\cancel{x P'_{l+1}} - P'_l - \left[\cancel{x P'_{l+1}} - x^2 P'_l\right] = (l+1)P_{l+1} - x(l+1)P_l$$

$$P'_l\,(x^2-1) = (l+1)P_{l+1} - x(l+1)P_l \quad ✓$$

مثال ۲ : کره رسانای بدون بار در یک میدان الکتریکی یکنواخت قرار گرفته است. پتانسیل بیرون کره را بدست آورید.

$$\vec{E} = E_0 \hat{z}$$



$$\nabla^2 \Phi = 0$$

به دلیل تقارن : $\Phi = \Phi(r,\theta)$

$$\Phi(r,\theta) = R(r)\,P(\theta)$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) = 0$$

$$\longrightarrow \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)\cancel{P}}_{R\cancel{P}} + \underbrace{\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right]\cancel{R}}_{\cancel{R}P} = 0$$

$$\xrightarrow{\times r^2} \frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right] = -\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left[r^2 dR/dr\right] = -K$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\, dP/d\theta\right] + \overset{l(l+1)}{K}P = 0 \\[2ex] d/dr\left[r^2\, dR/dr\right] - \underset{l(l+1)}{K}R = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{(1-x^2)y'' - 2xy'}_{d/dx\left[(1-x^2)\,dy/dx\right]} + \overset{l(l+1)}{K}y = 0$$

$$P = P_l(\cos\theta)$$

$$R(r) \sim r^l \,,\; r^{-(l+1)}$$

$$x = \cos\theta \Rightarrow dx = -\sin\theta\, d\theta \;;\; 1-x^2 = \sin^2\theta$$

$$\frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}\underbrace{\frac{dx}{d\theta}}_{\cancel{-\sqrt{1-x^2}}}\frac{d}{dx}\left[\sqrt{1-x^2}\,\underbrace{\frac{dx}{d\theta}}_{\cancel{-}\sqrt{1-x^2}}\frac{dP}{dx}\right] + KP = 0 \Rightarrow d/dx\left[(1-x^2)\,dP/dx\right] + KP = 0 \quad ✓$$

$$\Longrightarrow \Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left\{A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right\}P_l(\cos\theta)$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{E} &= E_0\hat{z}\\ \vec{E} &= -\vec{\nabla}\Phi\end{aligned}\right\} \Rightarrow \Phi = -E_0 \overset{r\cos\theta}{z}$$

میدان در دوردست

شرایط مرزی : $\Phi(r=a,\theta) = \Phi_0$ (فرض شده) , $\Phi(r\to\infty,\theta) = -E_0 r\cos\theta$

$$\Phi(r\to\infty,\theta) = \underset{P_0(\cos\theta)}{A_0} + \overset{P_1(\cos\theta)}{A_1 r} + \overset{P_2(\cos\theta)}{A_2 r^2} + \cdots + \overset{P_0(\cos\theta)}{\frac{B_0}{r}} + \overset{P_1(\cos\theta)}{\frac{B_1}{r^2}} + \cdots = -E_0 r\cos\theta + \text{ثابت} \Rightarrow \boxed{A_1 = -E_0\cos\theta}$$

$$\boxed{A_{l\geq 2} = 0}$$

$$P_0(\cos\theta) = 1 \,,\; P_1(\cos\theta) = \cos\theta$$

$$\varphi(a,\theta) = A_0 - \underbrace{E_0 a\cos\theta + \cancel{\frac{B_0}{a}}}_{} + \underbrace{\frac{B_1}{a^2}\cos\theta}_{} + \frac{B_2}{a^3}P_2(\cos\theta) + \cdots = \varphi_0 \Rightarrow \boxed{A_0 = \varphi_0}$$

$$\rightarrow \underbrace{\left(-E_0 a + B_1/a^2\right)}_{=0}\cos\theta \qquad \boxed{B_{l\geq 2} = 0 \quad , B_0 = 0}$$

$$\longrightarrow +E_0 a = B_1/a^2 \Rightarrow \boxed{B_1 = E_0 a^3}$$

$$\Longrightarrow \varphi(r,\theta) = \varphi_0 - E_0\cos\theta\, r + E_0 a^3\cos\theta/r^2 = \varphi_0 - E_0 r\cos\theta\left[1 - a^3/r^3\right]$$

چگالی بار سطحی : $\sigma = -\epsilon_0 \left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a} = -\epsilon_0\left[-E_0\cos\theta\left(1-\cancel{a^3/a^3}\right) - E_0 \cancel{a}\cos\theta\left(-\cancel{a^3}(-3)/\cancel{a^4}\right)\right]$

$$\rightarrow \sigma = 3\epsilon_0 E_0\cos\theta \longrightarrow q_{tot} = \int \sigma\, dA = 3\epsilon_0 E_0 a^2 \int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 0$$

گشتاور دوقطبی الکتریکی : $\vec{p} = \int \vec{r}\,\rho(\vec{r})\, dV \qquad \rho(r) = \sigma\,\underline{\delta(r-a)}$

در $r=a$ فقط بار وجود دارد.

$$\Longrightarrow \vec{p} = \int r\left[\cancel{\sin\theta\cos\phi\,\hat{i}} + \cancel{\sin\theta\sin\phi\,\hat{j}} + \cos\theta\,\hat{z}\right](3\epsilon_0 E_0\cos\theta)\,\delta(r-a)\; r^2 dr\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$\Longrightarrow \vec{p} = \cancel{3}\epsilon_0 E_0 a^3 \underbrace{\int_{-1}^{+1}\cos^2\theta\, d(\cos\theta)}_{2/\cancel{3}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi}\,\hat{z} \Longrightarrow \vec{p} = 4\pi\epsilon_0 E_0 a^3\,\hat{z}$$

یک سری روابط

نشان دهید :

$$\int_{-1}^{+1} \underbrace{x^2 P_{l+1}(x)\, P_{l-1}(x)}_{x P_{l+1} \quad x P_{l-1}} = \frac{2l(l+1)}{(4l^2-1)(2l+3)}$$

$$1)\ (l+1)P_{l+1}(x) - (2l+1)xP_l(x) + lP_{l-1}(x) = 0$$

$$l \to l+1 : (l+2)P_{l+2} - \left[2(l+1)+1\right]xP_{l+1} + (l+1)P_l = 0$$

$$l \to l-1 : lP_l(x) - \left[2(l-1)+1\right]xP_{l-1} + (l-1)P_{l-2} = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} P_l P_{l'}\, dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$$

$$\Longrightarrow \int_{-1}^{+1}\left\{\frac{l+2}{2l+3}P_{l+2} + \frac{l+1}{2l+3}P_l\right\}\left\{\frac{l}{2l-1}P_l + \frac{l-1}{2l-1}P_{l-2}\right\}dx =$$

$$\frac{l(l+1)}{(2l+3)(2l-1)}\underbrace{\int_{-1}^{+1} P_l^2\, dx}_{} = \frac{2l(l+1)}{(2l+3)(4l^2-1)}$$

* انتگرال مقابل را بیابید : $\int_0^1 P_l(x)\, dx$

رابطه بازگشتی ! : $P'_{l+1} - P'_{l-1} = (2l+1)P_l$

$$\rightarrow \int_0^1 P_l(x)\,dx = \frac{1}{2l+1}\int_0^1 \left[P'_{l+1} - P'_{l-1}\right]dx = \frac{1}{2l+1}\left[P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2l+1}\left\{ \cancel{\underbrace{P_{l+1}(1)}_{1}} - \cancel{\underbrace{P_{l-1}(1)}_{1}} - P_{l+1}(0) + P_{l-1}(0) \right\}$$

یادآوری : $P_{2l}(0) = (-1)^l \dfrac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}$ $\qquad P_{2l+1}(0) = 0 \qquad \forall l : P_l(1) = 1$

اگر l زوج باشد ، $l+1$ و $l-1$ فرد هستند : $\quad I = 0$

اگر l فرد باشد ، $l+1$ و $l-1$ زوج هستند :

$$P_{l+1}(0) = (-1)^{\frac{l+1}{2}} \frac{(l+1)!}{2^{l+1}\left[\frac{l+1}{2}!\right]^2}$$

$$I = \frac{1}{2l+1}\left\{ -(-1)^{\frac{l+1}{2}} \frac{(l+1)!}{2^{l+1}\left[\frac{l+1}{2}!\right]^2} + (-1)^{\frac{l-1}{2}} \frac{(l-1)!}{2^{l-1}\left[\frac{l-1}{2}!\right]^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2l+1}(-1)^{\frac{l-1}{2}} \frac{(l-1)!}{2^{l-1}\left[\frac{l-1}{2}!\right]^2}\left[-\cancel{(-1)^{\frac{l+1}{2}}}^{(-1)^{1/2}} \frac{\cancel{(l+1)!}^{\,(l-1)!\,l(l+1)}}{\cancel{2^{l+1}}_{2}\underbrace{\left[\frac{l+1}{2}!\right]^2}_{\left[\left(\frac{l-1}{2}\right)!\left(\frac{l+1}{2}\right)\right]^2}} \times \frac{\cancel{2^{l-1}}^{2^{-1}}\cancel{\left[\frac{l-1}{2}!\right]^2}}{\cancel{(-1)^{\frac{l-1}{2}}}_{(-1)^{-1/2}}\cancel{(l-1)!}} + 1 \right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{2l+1}}(-1)^{\frac{l-1}{2}} \frac{(l-1)!}{2^{l-1}\underbrace{\left[\frac{l-1}{2}!\right]^2}_{\left(\frac{l}{2}-\frac{1}{2}\right)!\left(\frac{l}{2}-\frac{1}{2}\right)!}}\left[\underbrace{\cancel{\frac{1}{4}}\frac{l\cancel{(l+1)}}{\frac{1}{4}(l+1)^{\cancel{2}}}+1}_{\frac{l}{l+1}+1 = \frac{\cancel{2l+1}}{l+1}}\right]$$

$$2^{l-1} = \frac{2^l}{2}$$

$$= (-1)^{\left(\frac{l-1}{2}\right)} \frac{(l-1)!}{2^l\left(\frac{l}{2}-\frac{1}{2}\right)!}\;\frac{1}{\left(\frac{l}{2}-\frac{1}{2}\right)!\left(\frac{l}{2}+\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{l}{2}+\frac{1}{2}\right)! \quad = \frac{(-1)^{\frac{l-1}{2}}}{2^l}\frac{(l-1)!}{\left(\frac{l-1}{2}\right)!\left(\frac{l+1}{2}\right)!}$$

مثال : پتانسیل روی یک کره رسانا به صورت زیر تعریف شده است :

$$\varphi(r=a,\theta) = \begin{cases} V_0 & 0 < \theta < \pi/2 \\ -V_0 & \pi/2 < \theta < \pi \end{cases}$$

پتانسیل داخل کره را بدست آورید.

حل مسأله مشابه $\nabla^2\varphi = 0$ و بدست می آوریم :

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{l=0} A_l r^l P_l(\cos\theta) + \sum_{l=0} B_l \underbrace{r^{-(l+1)}}_{0} P_l(\cos\theta)$$

چون پتانسیل در $r \to 0$ نباید واگرا شود.

$$\downarrow \times P_{l'}(\cos\theta)$$

$$\int_{-1}^{+1} P_{l'}(\cos\theta)\,\varphi(r,\theta)\,d(\cos\theta) = \sum_{l=0} A_l r^l \underbrace{\int_{-1}^{+1} P_{l'}(\cos\theta) P_l(\cos\theta)\,d(\cos\theta)}_{\frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}} = A_{l'} r^{l'} \frac{2}{2l'+1}$$

روی مرز $r=a$ ، φ مشخص است :

$$\int_0^1 P_l(\cos\theta)\, V_0\, d(\cos\theta) + \underbrace{\int_{-1}^0 P_l(\cos\theta)(-V_0)\, d(\cos\theta)} = A_l a^l \frac{2}{2l+1}$$

از فرمول رودریگز : $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$

$\cos\theta \to -\cos\theta$: $(-V_0)\int_{+1}^0 \underbrace{P_l(-\cos\theta)}_{(-1)^l P_l(\cos\theta)} d(-\cos\theta) = -V_0 \int_0^1 (-1)^l P_l(\cos\theta)\, d(\cos\theta)$

$$\Longrightarrow V_0\left(1-(-1)^l\right)\underbrace{\int_0^1 P_l(\cos\theta)\, d(\cos\theta)} = A_l a^l \frac{2}{2l+1}$$

از مسأله قبل : اگر l:even ، انتگرال صفر است .

$$l = 2s+1 \longrightarrow A_{2s+1} = \frac{4}{a^{2s+1}} \frac{(2s)!}{2^{2s-1}(s+1)!\, s!}$$

$$\longrightarrow \varphi(r,\theta) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{4\,(2s)!}{2^{2s-1}\, s!\,(s+1)!} \left(r/a\right)^{2s+1} P_{2s+1}(\cos\theta)$$