جلسه هفتم: تکینی ← قطب‌ها ← نقاط شاخه‌ای

نقاط شاخه‌ای در توابع چند مقداره سطوح ریمانی نگاشت همدیس

قطب pole

اگر تابع $f(z)$ در $z=z_0$ تحلیلی نباشد اما در تمامی نقاط همسایه آن تحلیلی باشد، z_0 یک تکینی ایزوله است.

مثل $\tan x$ که در $x = \mp\pi/2 , \mp 3\pi/2 , \dots$ تکینه است.

بسط لوران تابع $f(z)$ در $z=z_0$:

$$f(z)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m (z-z_0)^m = \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{n=-1} a_m (z-z_0)^m}_{\text{توان‌های منفی دارد.}} + \underbrace{\sum_{m=1}^{+\infty} a_m (z-z_0)^m}_{\text{در } z=z_0 \text{ تحلیلی است.}}$$

اگر برای $m<n<0$: $a_m=0$, $a_n\neq 0 \Longrightarrow$ z_0 یک قطب مرتبه n است

مثال: $n=-1$ ← یک جمله بسط لوران : $\dfrac{a_{-1}}{z-z_0}$: z_0 یک قطب مرتبه 1 است.

مثال: $n=-2$ ←

$$\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}+a_0+\cdots$$

: z_0 یک قطب مرتبه 2 است.

اگر بسط لوران تا $-\infty$ ادامه داشته باشد، z_0 یک تکینی اساسی (ضروری) است.

فرق بین تکینی مرتبه n و تکینی اساسی در این است که اگر تابع $f(z)$ را در $(z-z_0)^n$ ضرب کنیم، $f(z)(z-z_0)^n$ درحالتی که z_0 قطب مرتبه n است دیگر تکینه نیست اما چنین کاری برای تکینی اساسی نمی‌توان انجام داد.

مثال 1:

$$f(z)=\frac{1}{z(z-2)^5}+\frac{3}{(z-2)^3}$$

$z_0=2$: قطب مرتبه 5

$z_0=0$: قطب ساده ـ قطب مرتبه 1

مثال 2:

$$f(z)=e^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/z)^n}{n!}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\cdots$$

$z=0$: تکینی اساسی

مثال 3:

$$f(z)=\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

تابع تام

تغییر متغیر : $z=1/t$ $z\to\infty \equiv t\to 0$

$$\sin(1/t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{t^{2n+1}} = \frac{1}{t} - \frac{1}{3!\,t^3} + \frac{1}{5!\,t^5} + \cdots$$

→ در $t=0$ تکینگی اساسی دارد

⟸ $z=\infty$ یک تکینگی اساسی برای $\sin z$ است.

مثال ۴:

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^4} = \frac{1}{z^3}\,\frac{1}{1-z} \underset{|z|<1}{=} \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \cdots$$

در $|z|<1$ یک قطب مرتبه ۳ در $z_0=0$ دارد.

$$|z|>1:\quad f(z) = \frac{1}{-z^4}\,\frac{1}{-1/z+1} = \frac{-1}{z^4}\sum_{n=0}^{\infty}(1/z)^n = -\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} - \frac{1}{z^6} - \cdots$$

در $|z|>1$ یک تکینگی اساسی در $z_0=0$ دارد.

* برای صفحه‌بندی کردن تکینگی‌ها حتما باید لوران بزنیم.

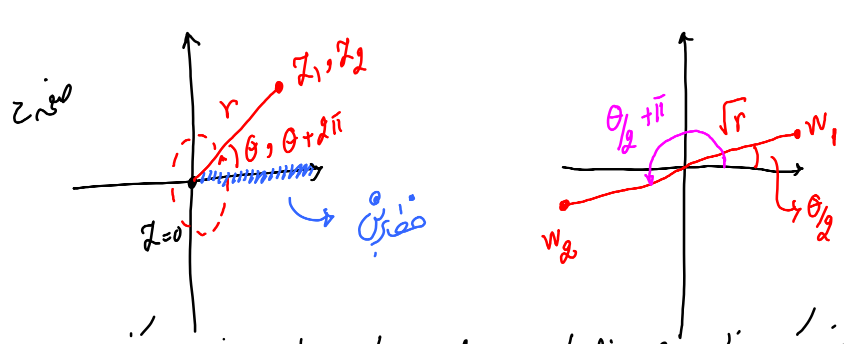
به توابعی که در صفحه مختلط به جز قطب‌های ایزوله تحلیلی هستند، توابع مرومورفیک می‌گویند. مثل $\tan z$، $\cot z$ و ....

نقاط شاخه‌ای branch points

نقاط شاخه‌ای نقاطی هستند که وقتی یک مرتبه حول این نقاط درنظر گرفته می‌شود، تابع بعد یک دور چرخش به مقدار اولیه خود باز نمی‌گردد. مثال:

$f(z) = \sqrt{z}$ ، $z=0$: نقطه شاخه‌ای ، $z_1 = re^{i\theta} \rightarrow w_1 = \sqrt{r}\,e^{i\theta/2}$

$\theta \rightarrow \theta + 2\pi \rightarrow z_2 = re^{i(\theta+2\pi)} = z_1 \rightarrow w_2 = \sqrt{r}\,e^{i\theta/2 + \pi i} = -\sqrt{r}\,e^{i\theta/2}$ ، $e^{\pi i} = -1$



تابع $\sqrt{z}$ یک تابع دو مقداره است.

برای اینکه بتوانیم توابع چند مقداره را تک مقدار کنیم یک خط برش cut line - branch cut در صفحه ایجاد می‌کنیم.

این خط برش‌ها مانند یک سد است که اجازه چرخش حول نقاط شاخه‌ای را نمی‌دهد.

مثال ۲:

$f(z)=(z^2-1)^{1/2}=\sqrt{(z-1)(z+1)} \rightsquigarrow$ نقاط شاخه‌ای : $z_0=\mp 1$

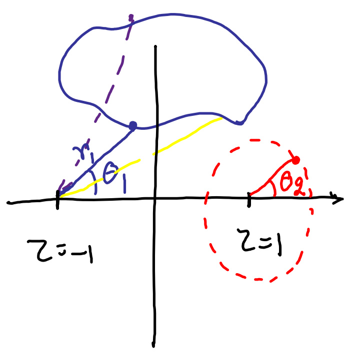
$$z=1/t \Rightarrow f(1/t)=\left(1/t^2-1\right)^{1/2}=\frac{1}{t}\underbrace{\left(1-t^2\right)^{1/2}}_{\text{از بسط دوجمله‌ای}}=\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-1)^n\left(t^2\right)^n$$

یادآوری : $(1+z)^{-m}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-m}{n}z^n$

$$=\frac{1}{t}-\frac{t}{2}-\frac{1}{8}t^3+\cdots$$

$t=0$ یک قطب ساده داریم $\Leftarrow$ $z=-\infty$ برای تابع $f(z)$ یک قطب ساده است.

$$z-1=r_1e^{j\theta_1} \quad , \quad z+1=r_2e^{j\theta_2} \Rightarrow f(z)=\sqrt{r_1r_2}\;e^{j(\theta_1+\theta_2)/2}$$



اگر پربند C

۱- شامل هیچ کدام از نقاط شاخه‌ای نباشد.

$$\theta_1\to\theta_1,\quad \theta_2\to\theta_2 \Rightarrow f(z)\to f(z)$$

۲- شامل $z=1$ باشد ولی فاقد $z=-1$.

$$\theta_1\to\theta_1,\quad \theta_2\to\theta_2+2\pi \Rightarrow f(z)\to\sqrt{r_1r_2}\;e^{j(\theta_1+\theta_2+2\pi)/2}=f(z)\underbrace{e^{j\pi}}_{-1}$$

$$f(z)\to -f(z)$$

۳- شامل $z=-1$ باشد و فاقد $z=1$

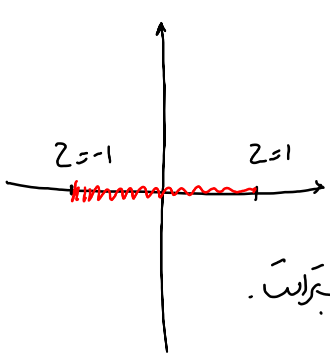
$$\theta_1\to\theta_1+2\pi,\quad \theta_2\to\theta_2 \Rightarrow f(z)\to\sqrt{r_1r_2}\;e^{j(\theta_1+2\pi+\theta_2)/2}$$

$$=\sqrt{r_1r_2}\;e^{j(\theta_1+\theta_2)/2}e^{j\pi}=-f(z) \Rightarrow f(z)\to -f(z)$$

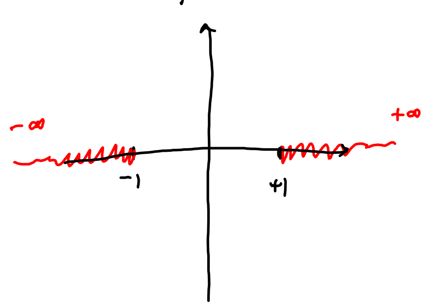
۴- شامل هر دو نقطه شاخه‌ای باشد

$$\theta_1\to\theta_1+2\pi,\quad \theta_2\to\theta_2+2\pi \Rightarrow f(z)\to\sqrt{r_1r_2}\;e^{j(\theta_1+2\pi+\theta_2+2\pi)/2}$$

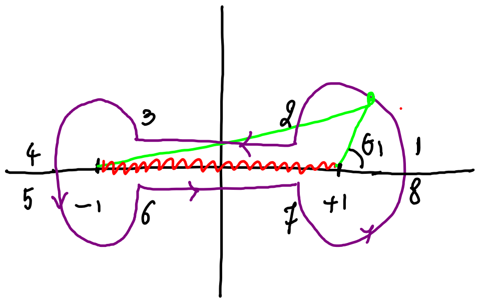
$$=\sqrt{r_1r_2}\;e^{j(\theta_1+\theta_2)/2}\underbrace{e^{2\pi j}}_{1}=f(z) \Rightarrow f(z)\to f(z)$$



مطلوب ماست.



برنچ‌ها به شکل مقابل در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم نشان دهیم تابع در اطراف نقاط شاخه‌ای چرا اختلاف فاز نمی‌دارد؟



points	θ_1	θ_2	$\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$
1	0	0	0
2	π	0	$\pi/2$
3	π	0	$\pi/2$
4	π	π	π
5	π	π	π
6	π	2π	$3\pi/2$
7	π	2π	$3\pi/2$
8	2π	2π	2π

* نقاط ۱ و ۸ مثل هم هستند یعنی تابع بعد چرخش حول هر دو نقطه شاخه‌ای روی خودش برگشته است. دقیقاً حالت ۴ که بررسی کردیم.

* نقاط بالا و پایین خط برش (مثل نقاط ۲ و ۷ یا ۳ و ۶) به اندازه π اختلاف فاز دارند.

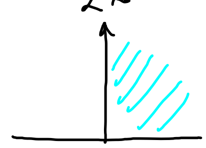
نقاط شاخه‌ای و توابع چند مقداره

1) $w = z^2$ ⇝ نگاشت ۲ به ۱

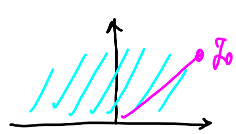
$$w = \rho e^{i\phi} \ , z = re^{i\theta} \implies \rho e^{i\phi} = r^2 e^{2i\theta} \longrightarrow \rho = r^2 \ , \ \phi = 2\theta$$

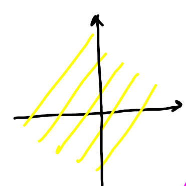
صفحه z صفحه w

$0 < \theta < \pi/2 \longrightarrow 0 < \phi < \pi$

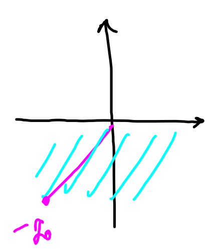


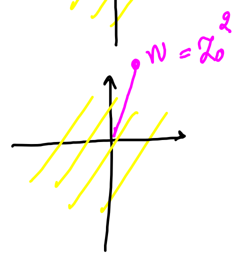
$0 < \theta < \pi \longrightarrow 0 < \phi < 2\pi$





$\pi < \theta < 2\pi \longrightarrow 2\pi < \phi < 4\pi$





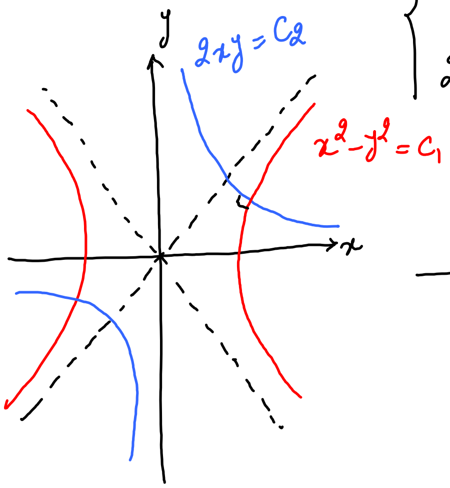
نقطه z_0 و نقطه $-z_0 = z_0 e^{+i\pi}$ هر دو به یک نقطه $w = z_0^2$ نگاشت می‌یابند.

مختصات دکارتی:

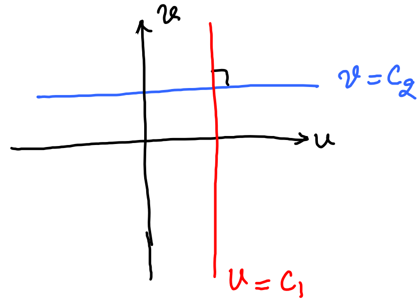
$z = x + iy \quad , \ w = u + iv$

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy = u + iv \rightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

در صفحه w : $u = c_1$, $v = c_2$ $\longleftarrow$ $\begin{cases} x^2 - y^2 = c_1 \\ 2xy = c_2 \end{cases}$



$$\xrightarrow[\text{نگاشت ۲ به ۱}]{w = z^2}$$



2) $w = \sqrt{z}$: معکوس نگاشت قبلی $\longrightarrow$ نگاشت ۱ به ۲ $\Rightarrow$ باید یک خط برش داشته باشیم

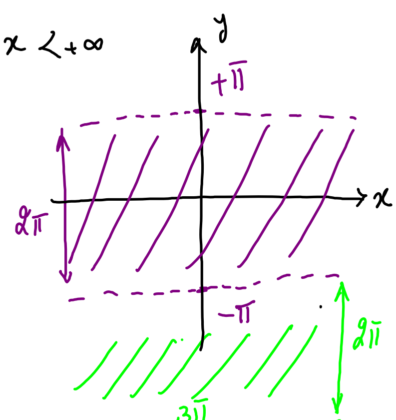
$$w = \rho e^{i\phi} \ , \ z = re^{i\theta} \Rightarrow \rho = \sqrt{r} \ , \ \phi = \theta/2$$

3) $w = e^z$

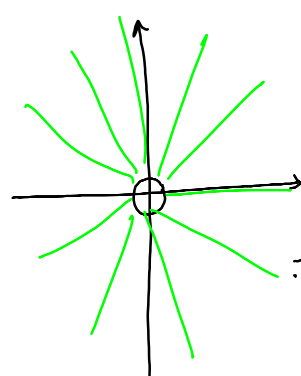
$$w = \rho e^{i\phi} \ , \ z = x + iy \Longrightarrow \rho e^{i\phi} = \underbrace{e^{x+iy+\overbrace{2\pi i n}^{\text{دوره تناوب}}}}_{e^x e^{i(y+2\pi n)}} \Longrightarrow \begin{cases} \rho = e^x \\ \phi = y + 2\pi n \end{cases}$$

$$-\pi \leqslant y \leqslant \pi \xrightarrow{n=1} \pi \leqslant \phi \leqslant 3\pi$$

$-\infty < x < +\infty$



$$\xrightarrow[\text{نگاشت ∞ به ۱}]{w = e^z}$$



کل نوار نشان داده شده در صفحه z به کل صفحه w غیر از نقطه o نگاشت می‌یابد

هر نواری به عرض 2π در صفحه z به کل صفحه w، غیر از نقطه صفر، نگاشت می‌یابد.

4) $w = \ln z \longrightarrow e^{z}$ معکوس نگاشت $\longrightarrow$ نگاشت ۱ به ∞

$$w = u + iv \quad , \; z = re^{i(\theta + 2\pi n)} \Longrightarrow u + iv = \ln r + i(\theta + 2\pi n) \Longrightarrow \begin{cases} u = \ln r \\ v = \theta + 2\pi n \end{cases}$$

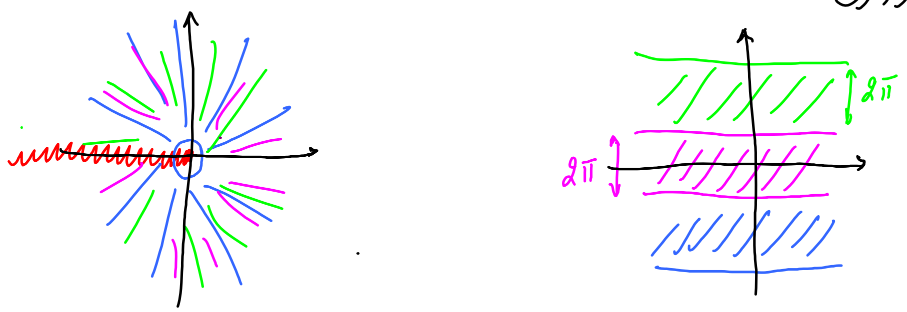
$0 < r < \infty$

$-\pi < \theta < \pi$

$n = 0, 1, 2, \dots$

$n = 0 \longrightarrow \ln$ مقدار اصلی تابع : $\mathrm{Ln}\, z = \ln r + i\theta$

علت ایجاد شدن ∞ نوار در صفحه w، چرخش حول نقطه $z=0$ است. پس برای تک مقدار شدن تابع یک خط برش در جهت منفی محور x ایجاد می‌کنیم.



Conformal mapping – نگاشت همدیس

نگاشت $w = f(z)$ که یک تابع تحلیلی است را یک نگاشت همدیس می‌نامند اگر زاویه بین منحنی‌ها حفظ شود.

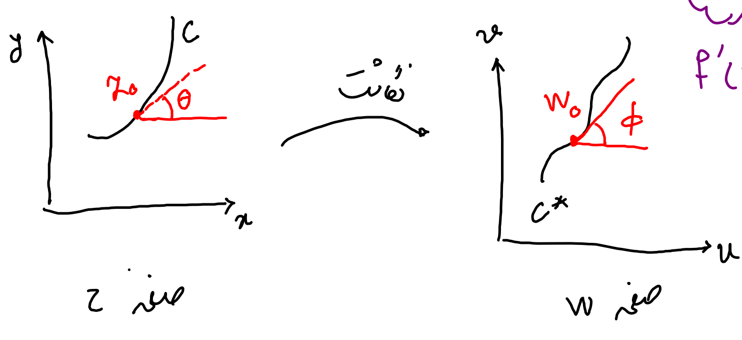
منحنی $C: \; z(t) = x(t) + iy(t) \xrightarrow{\text{مماس بر } C} \dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$ $= dz/dt$

C را به صفحه w نگاشت می‌دهیم : C^*

$$C^*: \; w = f(z) \xrightarrow{\text{مماس بر } C^*} \dot{w} = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dz}\frac{dz}{dt}$$

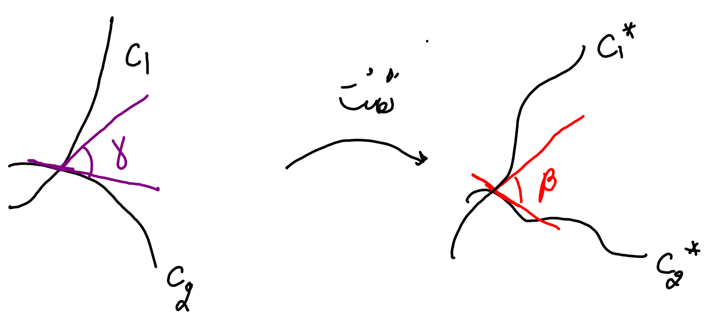
$\frac{dw}{dz} = f'(z(t))$, $\frac{dz}{dt} = \dot{z}$

مماس بر منحنی‌ها توسط آرگومان توابع داده می‌شود.



$$\arg \dot{w} = \arg(f'\dot{z})$$

$$\phi = \underbrace{\arg(f')}_{\alpha} + \underbrace{\arg(\dot{z})}_{\theta}$$



$$\beta = \phi_1 - \phi_2 = \alpha + \theta_1 - (\alpha - \theta_2)$$

$$= \theta_1 - \theta_2 = \gamma$$

* تمرین های عید نوروز (دکتر شادی)

۱) سری مک لورن تابع خطای مقابل را بیابید:

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2}\, dt$$

با بسط این تابع را بنویسید.

۲) بسط تیلور $\sin^{-1} z$ را بدست آورده و شعاع همگرایی را تعیین کنید.

راهنمایی: مشتق $\sin^{-1} z$ برابر $\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ است.

۳) ناحیه R در صفحه z با $x=0$ و $y=0$ و $x=2$ و $y=1$ محدود شده است. این ناحیه را تحت تبدیل $w=\sqrt{2}\, e^{\pi i/4} z$ به ناحیه R' در صفحه w نگاشت می‌دهیم. دو ناحیه R و R' را رسم کنید.

۴) نگاشت $w=z^2$ مفروض است. الف - آیا این نگاشت همدیس است؟

ب - ناحیه‌ای که با خطوط $x=1$، $y=1$ و $x+y=1$ محدود شده است را رسم کنید.

ج - با استفاده از نگاشت w، ناحیه فوق را نگاشت داده و آن را رسم کنید. زاویه بین منحنی ها را تعیین کنید.

۵) بسط تیلور یا لوران توابع زیر را حول نقاط خواسته شده بیابید.

$f(z) = \dfrac{1+2z}{z^2+z^3}$ $\quad |z|<1$

$f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$ $\quad |z|<1$

Reimann surfaces

$f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ $\quad |z+1|<1$

$f(z) = \dfrac{2}{(1-z)^3}$ $\quad |z|<1$

$f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ $\quad |z-2|<2$

$f(z) = \dfrac{e^z}{z^2+1}$ $\quad |z|<1$