مفاهیم اولیه

ODE : ordinary differential equation ← فقط یک متغیر

PDE : partial " " ← دو یا چند متغیر

مرتبه (order) : مرتبه بالاترین مشتق

خطی بودن :

عملگر خطی : $\mathcal{L}(a\varphi_1 + b\varphi_2) = a\mathcal{L}\varphi_1 + b\mathcal{L}\varphi_2$

مثال : $\frac{d}{dx}(a\varphi_1(x) + b\varphi_2(x)) = a\, d\varphi_1/dx + b\, d\varphi_2/dx$ ✓ $\longrightarrow$ d/dx : linear op.

اگر $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2$ و مراتب بالاتر در معادله دیفرانسیل ظاهر شوند، معادله غیرخطی است.

اگر غیر از خود ψ، توابع ψ وارد شوند، معادله غیرخطی است.

یک معادله دیفرانسیل را همگن می‌نامیم اگر فقط شامل خود ψ و مشتقات آن باشد.

در حالت کلی : $\mathcal{L}\psi = F$ (اپراتور، جواب معادله، source)

مثال‌هایی از معادلات کاربردی در فیزیک

1) Laplace's eq. : $\nabla^2\psi = 0$: PDE - 2nd order - homogenous - linear

2) poisson's " : $\nabla^2\psi = \rho/\epsilon_0$: " " - non " - linear

3) Helmholtz's " : $\nabla^2\psi \pm k^2\psi = 0$: " " - homogenous - "

4) Diffusion " : $\nabla^2\psi = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$: " " - " "

D'Alembertian: $\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

5) Scalar Potential " : $\partial^2\psi = \rho/\epsilon_0$: PDE - 2nd order - non homogenous - linear

6) Klein-Gordon " : $\partial^2\psi = -M^2\psi$: " " - homogenous - "

$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ $\quad c=\hbar=1$

$E = i\hbar\, \partial/\partial t$ و $p = -i\hbar\vec{\nabla}$

معادله حرکت یک ذره جرم دار اسکالر نسبیتی : $(\Box + M^2)\psi = 0$

$E = \frac{p^2}{2m} + V$

7) Schrodinger wave : $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \xrightarrow{\text{مستقل از زمان}} -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi$

معادله یک ذره جرم دار اسکالر و غیر نسبیتی

معادلات مرتبه اول

$$A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x,y)u = R(x,y) \quad (1)$$

اگر $A=0$ یا $B=0 \Rightarrow PDE \to ODE$

حالت خاص : $C=R=0$

فرض کنید $u(x,y) = f(p)$ که p ترکیبی نامشخص از x و y است.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{dp}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{df}{dp}\frac{\partial p}{\partial y}$$

مثال : $u(x,y) = x^4 + 4(x^2y + y^2 + 1)$
$= (\underbrace{x+2y}_{p})^2 + 4 = p^2 + 4$
$= f(p)$

جایگذاری در (1) : $\left[A(x,y)\frac{\partial p}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial p}{\partial y}\right]\underbrace{\frac{df}{dp}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow A\frac{\partial p}{\partial x} + B\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (I)$

p ثابت

دنبال جواب‌هایی هستیم که p در آنها ثابت باشد

$p = \underbrace{x+2y}_{\text{تابعی از } x \text{ و } y} \Rightarrow p = \text{ثابت} \Rightarrow dp = 0$

$$p = p(x,y) \Rightarrow dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy = 0 \quad (II)$$

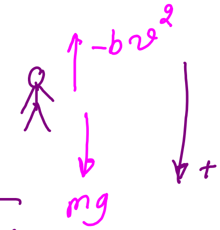
$(I) \to \frac{A(x,y)}{B(x,y)} = \frac{-\partial p/\partial y}{\partial p/\partial x} \qquad (II) \to -\frac{dx}{dy} = \frac{\partial p/\partial y}{\partial p/\partial x}$

تعمیم دو رابطه بالا $\Rightarrow \frac{dx}{A(x,y)} = \frac{dy}{B(x,y)}$: می‌توانیم از هر دو طرف انتگرال بگیریم

حالت خاص : $A(x,y) = Q(y) \quad B(x,y) = -P(x) \Rightarrow P(x)dx + Q(y)dy = 0$

* نکته : اگر ضریب u صفر نباشد، به دنبال حل‌هایی به شکل $u(x,y) = h(x,y)f(p)$ هستیم.

مثال: سرعت سقوط یک چتر باز را بصورت تابعی از زمان بیابید. مقاومت هوا را بصورت $-bv^2$ در نظر بگیرید.



$$v(t=0)=0 \qquad F=ma \Rightarrow \cancel{m}g-\frac{b}{m}v^2 = m\dot{v} = \cancel{m}\frac{dv}{dt}$$

$$\rightarrow \int_{t_0}^{t} dt = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{g-\frac{b}{m}v^2} \rightarrow \cdots \Rightarrow v = v_0 \tanh t/T \;;\; T=\sqrt{\frac{m}{gb}}$$

معادلات مرتبه دوم

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = R$$

A، B، ...، R توابعی از x و y هستند.

$B^2-4AC>0$: hyperbolic

$B^2-4AC=0$: Parabolic

$B^2-4AC<0$: elliptic

حالت خاص: A و B و ... و R ثابت باشند.

حالت خاص: $R=D=E=F=0$

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

مثال‌ها: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (لاپلاس دو بعدی) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ (معادله موج ۱+۱ بعدی)

$$u(x,y)=f(p) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{dp}\frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{dp}\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{df}{dp}\right)\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{df}{dp}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dp^2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \frac{df}{dp}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

$\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}$

به همین روش: $$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{d^2 f}{dp^2}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{df}{dp}\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}$$

در عبارت $\frac{df}{dp}$ ظاهر شده اند. برای حذف آنها حالتی را در نظر میگیریم که ضریب آنها صفر شود. پس p باید تابع خطی از x و y باشد:

$$p = ax+by \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = a\frac{df}{dp} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = b\frac{df}{dp}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = ab\,\frac{d^2 f}{dp^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2\,\frac{d^2 f}{dp^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = b^2\,\frac{d^2 f}{dp^2}$$

حال در PDE جایگذاری کرده و داریم:

$$(Aa^2 + Bba + Cb^2)\,\overset{\neq 0}{\frac{d^2 f}{dp^2}} = 0$$

$$\text{اگر}\quad \frac{d^2 f}{dp^2} = 0 \longrightarrow u = kx + ly + m \quad : \quad \text{حل بدیهی}$$

$$\longrightarrow Aa^2 + Bba + Cb^2 = 0 \longrightarrow A + B(b/a) + C(b/a)^2 = 0$$

$$\longrightarrow b/a = \frac{-B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C} = \lambda_{1,2} \longrightarrow \begin{cases} P_1 = x + \lambda_1 y \\ P_2 = x + \lambda_2 y \end{cases}$$

hyperbolic حالت

$$\longrightarrow \text{حل کلی همواره} : \quad u(x,y) = f(x + \lambda_1 y) + g(x + \lambda_2 y)$$

مثال: معادله موج (1+1) بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \Longrightarrow v^2\,\partial^2 u/\partial x^2 - \partial^2 u/\partial t^2 = 0 \qquad A = v^2,\ B = 0,\ C = -1$$

$$B^2 - 4AC > 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{0 \mp \sqrt{0 + 4v^2}}{-2} = \mp v = b/a \qquad a = 1,\ b = \mp v$$

$$P = ax + by = x \mp vt \Longrightarrow u(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

: parabolic حالت

$$B^2 - 4AC < 0 \longrightarrow b/a = \frac{-B \mp i\sqrt{4AC - B^2}}{2C} = \lambda_{1,2}$$

مثال: معادله لاپلاس دو بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad A = C = 1,\ B = 0 \longrightarrow B^2 - 4AC < 0$$

$$b/a = \frac{0 \mp \sqrt{0 - 4}}{2} = \mp i = \lambda_{1,2} \longrightarrow \begin{cases} P_1 = x + iy \\ P_2 = x - iy \end{cases} \Longrightarrow u(x,y) = f(x + iy) + g(x - iy)$$

: elliptic حالت

$$B^2 - 4AC = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -B/2C \Longrightarrow u(x,y) = f\left(x - \frac{B}{2C}y\right)$$

برای یافتن جواب کلی، $u(x,y)$ را به شکل مقابل در معادله امتحان می‌کنیم:

$$u(x,y) = h(x,y)\, g(\overbrace{x - \tfrac{B}{2C}y}^{v})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} g + h \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}}_{\frac{\partial g}{\partial v}\overset{1}{\frac{\partial v}{\partial x}} = dg/dv} \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} g + 2\frac{\partial h}{\partial x}\overset{dg/dv}{\cancel{\frac{\partial g}{\partial x}}} + h\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y} g + \frac{\partial h}{\partial x}\overset{-\frac{B}{2C}\,dg/dv}{\frac{\partial g}{\partial y}} + \frac{\partial h}{\partial y}\overset{dg/dv}{\frac{\partial g}{\partial x}} + h\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}$$

به همین ترتیب $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ را هم حساب می‌کنیم و همه مشتقات را در PDE می‌گذاریم.

$$A\left\{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} g + 2\underline{\frac{\partial h}{\partial x}\frac{dg}{dv}} + h\cancel{\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}}\right\} + B\left\{\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} g - \underline{\frac{B}{2C}\frac{dg}{dv}\frac{\partial h}{\partial x}} + \underline{\frac{\partial h}{\partial y}}\frac{dg}{dv} + h\cancel{\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}}\right\}$$

$$+ C\left\{\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} g + \cancel{2}\left(\frac{-B}{\cancel{2}C}\right)\underline{\frac{\partial h}{\partial y}}\frac{dg}{dv} + h\cancel{\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}}\right\} = 0$$

توجه کنید که g در PDE صدق می‌کند.

$$A\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$$

جملات آبی $= \frac{\partial h}{\partial x}\frac{dg}{dv}\left(2A - \frac{B^2}{2C}\right) = \frac{\partial h}{\partial x}\frac{dg}{dv} \times \frac{1}{2C}\left(\underbrace{4AC - B^2}_{0}\right) = 0$

جملات قرمز $= \frac{\partial h}{\partial y}\frac{dg}{dv}\left(B - C \times B/C\right) = 0$

$$\longrightarrow \left\{A\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right\} g = 0 \longrightarrow$$

h هم در PDE صدق می‌کند

این h هر تابعی از x و y می‌تواند باشد.

$\Longrightarrow$ حل کلی : $u(x,y) = f(x - B/2C) + h(x,y)\, g(x - B/2C)$

PDE های غیرخطی

ساده‌ترین معادله خطی : $\frac{\partial \psi}{\partial x} + c\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$

غیرخطی " " : $\frac{\partial \psi}{\partial x} + \underbrace{c(\psi)}\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$

تابعی مشخص از ψ است.

اگر در یک موج $ck = \omega$ باشد، $\omega = \omega(k)$ است اما $\frac{d^2\omega}{dk^2} = 0$ است. در این حالت موج غیرپاشنده است.

حال اگر $\frac{d^2\omega}{dk^2} \neq 0$ باشد، گفته می‌شود که موج پاشنده است.

شناخته‌ترین معادله غیرخطی پاشنده، معادله KDV (Korteweg-de Vries) است:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = 0$$

امواج سطحی آب که در کانال‌ها منتشر می‌شوند را می‌توان با این معادله توصیف کرد.
که در واقع حل‌های سالیتونی هستند.

$$\xi = x - ct \Longrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = -c\frac{d\psi}{d\xi}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{d\psi}{dx}, \quad \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = \frac{d^3\psi}{d\xi^3}$$

جایگذاری در معادله

$$\Longrightarrow (-c+\psi)\frac{d\psi}{d\xi} + \frac{d^3\psi}{d\xi^3} = 0 \xrightarrow{\times\, d\psi/d\xi} \underbrace{2\psi'\psi''}_{\frac{d}{d\xi}(\psi'^2)} = \underbrace{2c\psi\psi'}_{c\frac{d}{d\xi}(\psi^2)} - \psi^2\psi'$$

$d\psi/d\xi$

انتگرال از طرفین $\Longrightarrow \psi'^2 = c\psi^2 + \psi^3/3 + \alpha$

اگر موج جایگزیده باشد : $\xi = 0 \Rightarrow x = ct \Rightarrow \alpha = 0$

$$\Longrightarrow \psi' = \sqrt{c\psi^2 + \psi^3/3} \Longrightarrow \psi(\xi) = \frac{3c}{\cosh^2(\sqrt{c}\,\xi/2)}$$