جلسه نهم: سری فوریه ← پدیده گیبس   پاسخ نوسانگرهای هماهنگ به نیروهای تناوبی ضربه‌ای

$$F(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \quad ; \quad F(t) = F(t+\tau) \;;\; \tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

دوره تناوب

$$\xrightarrow{\times \cos(n\omega t)} \int_0^{\tau} F(t)\cos(m\omega t)\,dt = \tfrac{1}{2}a_0 \underbrace{\int_0^{\tau} \cos(m\omega t)\,dt}_{0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_0^{\tau} \cos(m\omega t)\cos(n\omega t)\,dt}_{\tau/2\, \delta_{nm}}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_0^{\tau} \cos(m\omega t)\sin(n\omega t)\,dt}_{0}$$

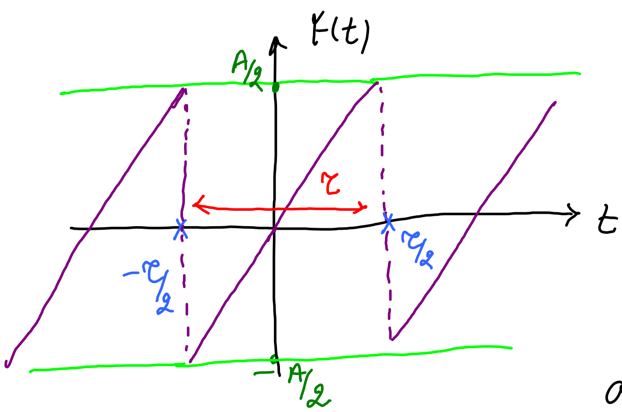
$$\Rightarrow \int_0^{\tau} F(t)\cos(m\omega t)\,dt = \tau/2 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{nm}}_{a_m} \Rightarrow a_m = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} F(t)\cos(m\omega t)\,dt$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{\tau}\displaystyle\int_{-\tau/2}^{+\tau/2} F(t)\,dt \\[2ex] a_n = \dfrac{2}{\tau}\displaystyle\int_{-\tau/2}^{\tau/2} F(t)\cos(n\omega t)\,dt \\[2ex] b_n = \dfrac{2}{\tau}\displaystyle\int_{-\tau/2}^{\tau/2} F(t)\sin(n\omega t)\,dt \end{cases}$$

مثال: سری فوریه تابع مثلثی زیر را بیابید و سری را برای دو جمله، ۵ جمله و ۸ جمله رسم کنید.

$F(-t) = A(-t)/\tau = -F(t)$: تابع فرد

$$F(t) = At/\tau \qquad -\tau/2 < t < \tau/2$$



$$\underbrace{F(t)}_{\text{فرد}} = \tfrac{1}{2}\underbrace{a_0}_{\text{زوج}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\cos(n\omega t)}_{\text{زوج}} + b_n \underbrace{\sin(n\omega t)}_{\text{فرد}}$$

$$a_0 = \frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} F(t)\,dt$$

$$a_0 = \frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} At/\tau\,dt = \frac{2A}{\tau^2} \times \tfrac{1}{2}t^2 \Big|_{-\tau/2}^{+\tau/2} = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} F(t)\sin(n\omega t)\,dt = \frac{2A}{\tau^2}\int_{-\tau/2}^{+\tau/2} \underbrace{t}_{u}\,\underbrace{\sin(n\omega t)dt}_{dv}$$

$F(t) = At/\tau$

$u = t \rightarrow u' = 1$

$dv = \sin(n\omega t) \Rightarrow v = \frac{-1}{n\omega}\cos(n\omega t)$

یادآوری: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\Rightarrow b_n = \frac{2A}{\tau^2}\left\{ \frac{-t}{n\omega}\cos(n\omega t)\Big|_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega} + \cancel{\frac{1}{n\omega}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\cos(n\omega t)\,dt} \right\}$$

0

$$\Rightarrow b_n = \frac{2A}{\tau^2}\times\frac{1}{n\omega}\left\{ -\frac{\pi}{\omega}\cos\left(n\omega\times\frac{\pi}{\omega}\right) + \left(-\frac{\pi}{\omega}\right)\cos\left(n\omega\times\frac{-\pi}{\omega}\right)\right\}$$

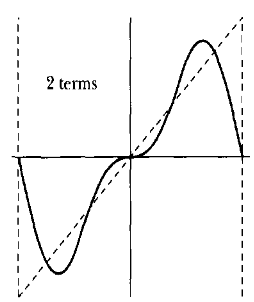
$$\Rightarrow b_n = \frac{2A}{\frac{4\pi^2}{\omega^2}}\times\frac{-1}{n\omega}\times 2\times\frac{\pi}{\omega}\cos(n\pi) = \frac{-A}{\pi n}\underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} = \begin{cases} \dfrac{-A}{n\pi} & \text{زوج } n \\[2ex] \dfrac{A}{n\pi} & \text{فرد } n \end{cases}$$

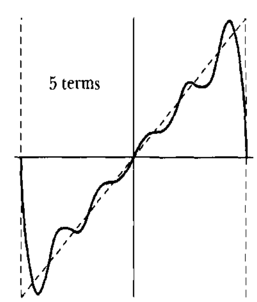
$$\Rightarrow b_n = \frac{A}{n\pi}(-1)^{n+1} \Rightarrow F(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin(n\omega t)$$

$$\Rightarrow F(t) = \frac{A}{\pi}\left\{ \sin\omega t - \frac{1}{2}\sin(2\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) - \cdots \right\}$$

هرچقدر تعداد جملات سمت راست رابطه بالا بیشتر شود

به نمودار سمت چپ نزدیکتر می‌شویم.

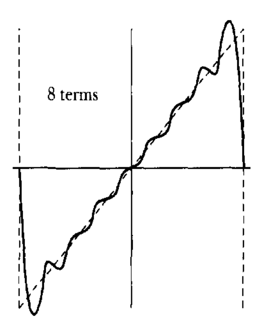




اما حتی با در نظر گرفتن تعداد بی‌نهایت جمله از سمت راست،

در نقاط ناپیوستگی $(-\tau/2, \tau/2)$، همچنان نوسان دیده

می‌شود که آن را پدیده گیبس می‌نامند.



هر تابع پریودیک بصورت مجموعی از توابع sin و cos نوشته می‌شود. جوابهای معادله دیفرانسیل غیرهمگن با نیروهای sin یا cos قبلاً داده شده‌اند.

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{A}{\pi}\sin\omega t \longrightarrow x_1(t) = \dots$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{-A}{2\pi}\sin 2\omega t \longrightarrow x_2(t) = \dots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\longrightarrow x_n(t) = \dots$$

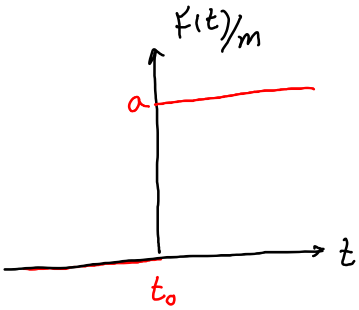
جواب معادله دیفرانسیل مقابل چیست؟

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = A\,t/\tau$$

$$\downarrow$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_n(t)$$

پاسخ نوسانگر به نیروی پله‌ای — Heaviside



$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)/m \longrightarrow$$ می‌تواند تغییر کند.

$$F(t)/m = H(t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ a = \text{ثابت} & t > t_0 \end{cases}$$

شرایط اولیه: $\dot{x}(t_0) = 0$ و $x(t_0) = 0$

$$t < t_0 : \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \longrightarrow x(t) = 0$$

$$t > t_0 : \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = a \Longrightarrow x(t) = x_p(t) + x_c(t)$$

$x_c(t)$، جواب عام ← از صفر قرار دادن سمت راست بدست می‌آید

$x_p(t)$: جواب خاص $\longrightarrow x_p(t) = \dfrac{a}{\omega_0^2}$: جواب پایا

داشتیم: $x_c(t) = e^{-\beta t}\left[A_1' e^{i\omega_1 t} + A_2' e^{-i\omega_1 t}\right]$; $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

$$\downarrow$$

برای این مسأله: $x_c(t) = e^{-\beta(t-t_0)}\left[\underline{A_1}\cos\omega_1(t-t_0) + \underline{A_2}\sin\omega_1(t-t_0)\right]$; جواب گذرا

که مبدأ زمانی در t_0 است.

A_1 و A_2 از شرایط اولیه مسأله تعیین می‌شوند.

$$x(t) = e^{-\beta(t-t_0)}\left[A_1 \cos\omega_1(t-t_0) + A_2 \sin\omega_1(t-t_0)\right] + \frac{a}{\omega_0^2}$$

$$x(t=t_0)=0 \Longrightarrow A_1 \cos\omega_1(t_0-t_0) + A_2 \underbrace{\sin\omega_1(t_0-t_0)}_{0} + \frac{a}{\omega_0^2} = 0 \Longrightarrow A_1 = \frac{-a}{\omega_0^2} \quad (1)$$

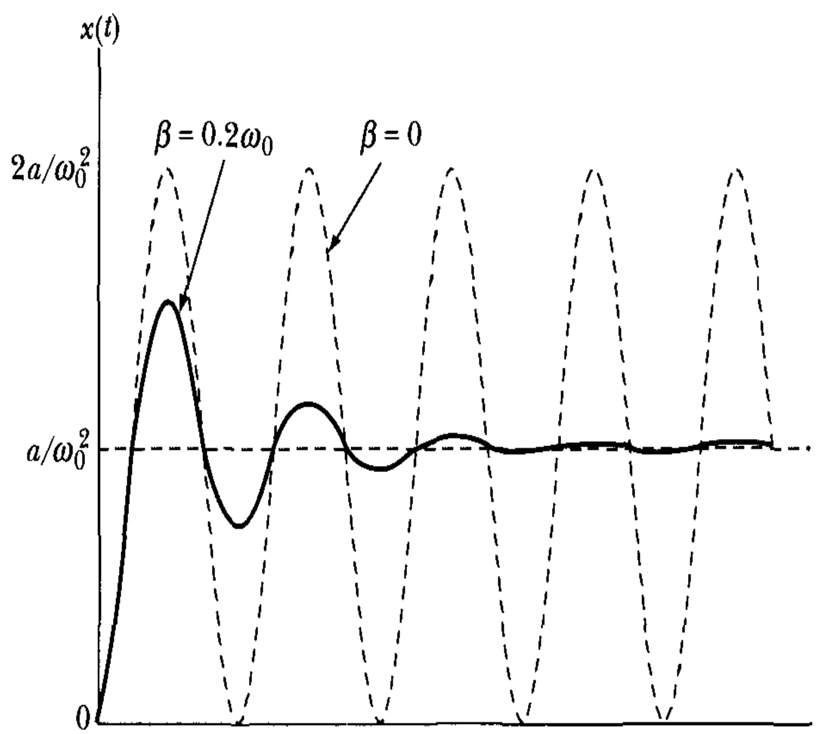
$$\dot{x}(t) = -\beta e^{-\beta(t-t_0)}\left[A_1 \cos\omega_1(t-t_0) + A_2 \sin\omega_1(t-t_0)\right]$$

$$+ e^{-\beta(t-t_0)}\left[-A_1\omega_1 \sin\omega_1(t-t_0) + A_2\omega_1 \cos\omega_1(t-t_0)\right]$$

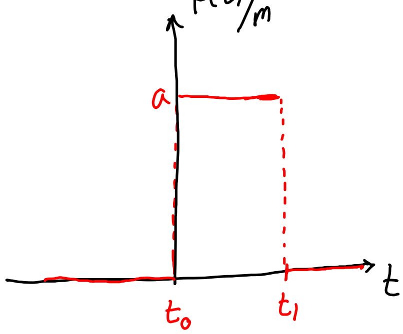
$$\dot{x}(t=t_0)=0 \Longrightarrow -\beta\left[A_1\right] + \left[A_2\omega_1\right] = 0 \Longrightarrow A_2 = \frac{\beta}{\omega_1}A_1 \overset{(1)}{\Longrightarrow} A_2 = \frac{-\beta a}{\omega_0^2\omega_1}$$

$$(I)$$

$$\Longrightarrow x(t) = \begin{cases} e^{-\beta(t-t_0)}\left\{\dfrac{-a}{\omega_0^2}\cos\omega_1(t-t_0) - \dfrac{\beta a}{\omega_1\omega_0^2}\sin\omega_1(t-t_0)\right\} + \dfrac{a}{\omega_0^2} & t > t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$

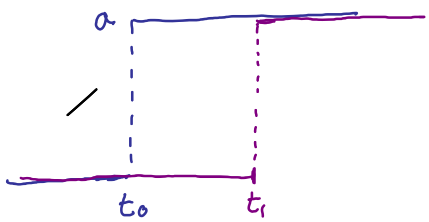


پاسخ نوسانگر به نیروهای ضربه‌ای   Impulse



$$I(t_0,t_1)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ a & t_0<t<t_1\\ 0 & t>t_1\end{cases}$$

شرایط اولیه: $x(t_0)=0$ و $\dot{x}(t_0)=0$



$$I(t_0,t_1)=H(t_0)-H(t_1)$$

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=I(t_0,t_1)=H(t_0)-H(t_1) \quad *$$

(از نیروهای پله‌ای) : $\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=H(t_0)\longrightarrow x_1(t)=\dots$

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=H(t_1)\longrightarrow x_2(t)=\dots$$

جواب معادله دیفرانسیل * ، برهم‌نهی جواب‌های x_1 و x_2 است. چون نیروی $I(t_0,t_1)$ برهم‌نهی $H(t_0)$ و $H(t_1)$ است.

$\Rightarrow t<t_0$: $x(t)=0 \longleftarrow \dot{x}(t_0)=x(t_0)=0$

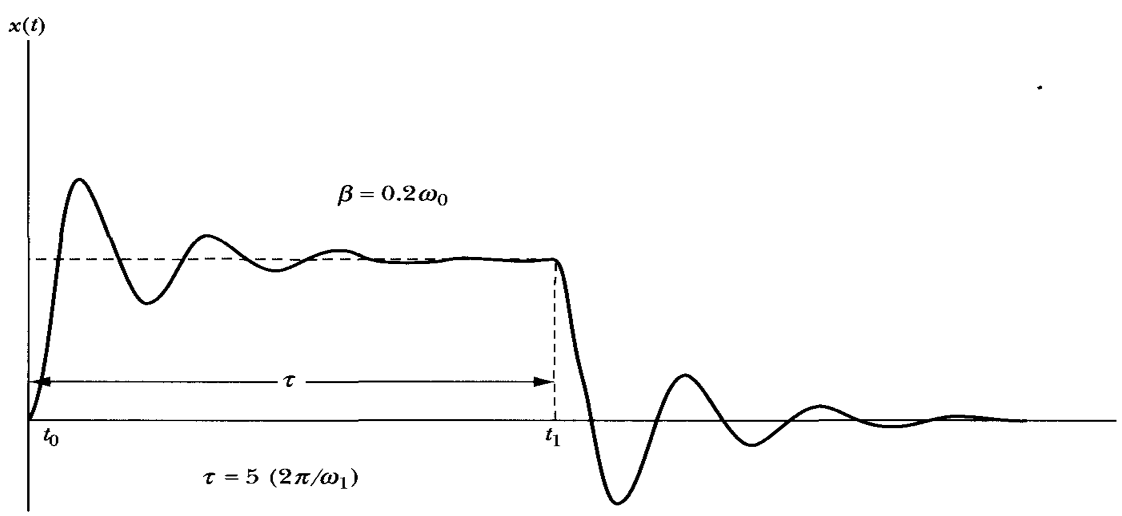
$$t_1-t_0=\tau\Rightarrow t_1=t_0+\tau$$

$t_0<t<t_1$: جواب دقیقاً شبیه رابطه I است

$$t>t_1:\quad x(t)=\frac{a}{\omega_0^2}\left[1-e^{-\beta(t-t_0)}\cos\omega_1(t-t_0)-\frac{\beta}{\omega_1}e^{-\beta(t-t_0)}\sin\omega_1(t-t_0)\right]$$

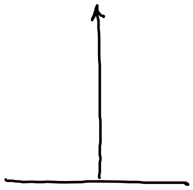
$\tau+t_0$

$$-\frac{a}{\omega_0^2}\left[1-e^{-\beta(t-\underbrace{t_1}_{t_0+\tau})}\cos\omega_1(t-\underbrace{t_1}_{t_0+\tau})-\frac{\beta}{\omega_1}e^{-\beta(t-t_1)}\sin\omega_1(t-\underbrace{t_1}_{t_0+\tau})\right]$$



برای نیروی ضربه‌ای : $\tau \to 0$ و $a \to \infty$ (اما حاصل‌ضرب $a\tau$ همیشه ثابت است.

نیروی ضربه‌ای شبیه تابع دلتای دیراک است :



[redacted]

$$: x(t) = \frac{a}{\omega_0^2}\left[\cancel{1} - e^{-\beta(t-t_0)} \cos\omega_1(t-t_0) - \frac{\beta}{\omega_1} e^{-\beta(t-t_0)} \sin\omega_1(t-t_0)\right]$$

$$- \frac{a}{\omega_0^2}\left[\cancel{1} - e^{-\beta(t-t_0-\tau)} \cos\omega_1(t-t_0-\tau) - \frac{\beta}{\omega_1} e^{-\beta(t-t_0-\tau)} \sin\omega_1(t-t_0-\tau)\right]$$

$\sin\omega_1(t-t_0)\cos\omega_1\tau - \cos(t-t_0)\omega_1 \sin\tau\omega_1$

$e^{-\beta(t-t_0)} e^{\beta\tau}$ $\quad \cos\omega_1(t-t_0)\cos\omega_1\tau + \sin\omega_1(t-t_0)\sin\omega_1\tau$

$$= \frac{a}{\omega_0^2} e^{-\beta(t-t_0)}\Big\{ \cos\omega_1(t-t_0)\Big\{1 + e^{\beta\tau}\cos\omega_1\tau + \frac{\beta}{\omega_1} e^{\beta\tau}\sin\omega_1\tau\Big\}$$

$$+ \sin\omega_1(t-t_0)\Big\{-\beta/\omega_1 + e^{\beta\tau}\sin\omega_1\tau - \frac{\beta}{\omega_1} e^{\beta\tau}\cos\omega_1\tau\Big\}\Big\}$$

$\tau \to 0$ (τ کوچک است) می‌توانیم $e^{\beta\tau}$ و $\sin\omega_1\tau$ و $\cos\omega_1\tau$ را بسط دهیم:

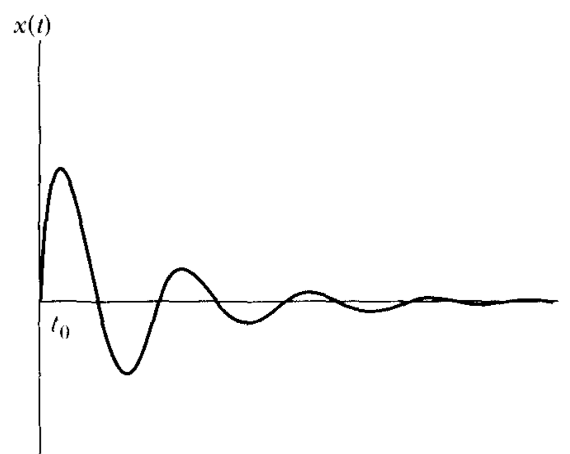
$$e^{\beta\tau} \simeq 1 + \beta\tau \qquad \sin\omega_1\tau \simeq \omega_1\tau - \frac{\omega_1^3\tau^3}{3!} \qquad \cos\omega_1\tau = 1 - \frac{\omega_1^2\tau^2}{2!}$$

پس از محاسبه داریم:

$$x(t) = \frac{a e^{-\beta(t-t_0)}}{\omega_0^2} \sin\omega_1(t-t_0)\Big\{\underbrace{\omega_1\tau + \frac{\beta^2\tau}{\omega_1}}_{(\underbrace{\omega_1^2+\beta^2}_{\omega_0^2})\frac{\tau}{\omega_1}}\Big\} \Rightarrow x(t) = \frac{b}{\omega_1} e^{-\beta(t-t_0)} \sin\omega_1(t-t_0)$$

$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$

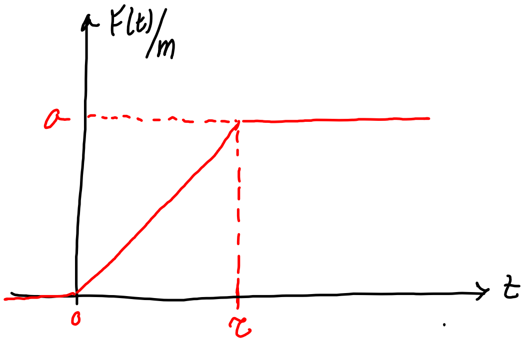
$b = a\tau \Rightarrow a = b/\tau$



تمرین ۳-۳۱ : ترکیب نوسانگر خطی میرا که در وضعیت تعادل، در حال سکون است، تابع وادارنده‌ای وارد می‌آید که به شکل مقابل می‌باشد :

$$\frac{F(t)}{m} = \begin{cases} 0 & t<0 \\ at/\tau & 0<t<\tau \\ at/\tau - a/\tau\,(t-\tau) = a & t>\tau \end{cases}$$

الف- تابع پاسخ را بیابید. ب- نشان دهید وقتی $\tau \to 0$، جواب مسأله تبدیل به جواب تابع پله‌ای می‌شود.



$$t<0 \longrightarrow x(t)=0$$

$$0<t<\tau : \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = at/\tau$$

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

$$x_p(t) = A + Bt$$

از صفر قرار دادن سمت راست معادله دیفرانسیل بدست می‌آید.

$$x_c(t) = e^{-\beta t}\left[A_1 \sin\omega_1 t + A_2 \cos\omega_1 t\right]$$

اینها از شرایط اولیه مسأله بدست می‌آید

این رابطه باید در معادله دیفرانسیل صدق کند :

$$\dot{x}_p(t) = B \quad \text{و} \quad \ddot{x}_p(t) = 0$$

$$\Rightarrow 0 + 2\beta B + \omega_0^2(A + Bt) = at/\tau$$

$$\Rightarrow 2\beta B + \omega_0^2 A + \omega_0^2 B t = at/\tau \Rightarrow \begin{cases} 2\beta B + \omega_0^2 A = 0 \Rightarrow A = \dfrac{-2\beta a}{\omega_0^4 \tau} \\ \omega_0^2 B = a/\tau \Rightarrow B = \dfrac{a}{\tau\omega_0^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_p(t) = \frac{a}{\omega_0^2 \tau} t - \frac{2\beta a}{\omega_0^4 \tau}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\beta t}\left[A_1 \sin\omega_1 t + A_2 \cos\omega_1 t\right] + \frac{at}{\omega_0^2\tau} - \frac{2\beta a}{\omega_0^4\tau} \quad (*')$$

$$x(t=0) = A_2 - \frac{2\beta a}{\omega_0^4 \tau} = 0 \Rightarrow A_2 = \frac{2\beta a}{\omega_0^4 \tau}$$

$$\dot{x}(t) = -\beta e^{-\beta t}\left[A_1 \sin\omega_1 t + A_2 \cos\omega_1 t\right] + e^{-\beta t}\left[\omega_1 A_1 \cos\omega_1 t - A_2\omega_1 \sin\omega_1 t\right] + \frac{a}{\omega_0^2 \tau}$$

$$\dot{x}(t=0) = -\beta\Big[\underbrace{A_2}_{\frac{2\beta a}{\omega_0^4\tau}}\Big] + \Big[\omega_1 A_1\Big] + \frac{a}{\omega_0^2\tau} = 0 \Rightarrow A_1 = \frac{-a}{\omega_1\omega_0^2\tau} + \frac{2\beta^2 a}{\omega_1\omega_0^4\tau}$$

$$A_1 = \frac{a}{\omega_1\omega_0^2\tau}\left[\frac{2\beta^2}{\omega_0^2} - 1\right]$$

برای زمان‌های $t>\tau$ ، نیرو برابر تفاضل دو نیروی $\underbrace{at/\tau}_{\text{مثل رابطه (*)}}$ و $\underbrace{\frac{a}{\tau}(t-\tau)}$ است. پس جواب‌های هر کدام را بدست آورده و از هم کم می‌کنیم.

در رابطه (*) t را به $t-\tau$ تبدیل می‌کنیم.

ب

$$x(t) = \frac{a}{\omega_0^2\tau}\Bigg[\frac{2\beta}{\omega_0^2}e^{-\beta t}\cos\omega_1 t + \underbrace{e^{-\beta(t-\tau)}}_{e^{-\beta t}e^{\beta\tau}}\underbrace{\cos\omega_1(t-\tau)}_{\cos\omega_1 t\cos\omega_1\tau + \sin\omega_1 t\sin\omega_1\tau} + \frac{e^{-\beta t}}{\omega_1}\left(\frac{2\beta^2}{\omega_0^2}-1\right)\sin\omega_1 t$$

$$- \frac{e^{-\beta(t-\tau)}}{\omega_1}\left(2\beta^2/\omega_0^2 - 1\right)\underbrace{\sin\omega_1(t-\tau)}_{\sin\omega_1 t\cos\omega_1\tau - \cos\omega_1 t\sin\omega_1\tau} + t - (t-\tau)\Bigg]$$

تقریب ، $e^{\beta\tau} \simeq 1+\beta\tau \qquad \cos\omega_1\tau \simeq 1 \qquad \sin\omega_1\tau \simeq \omega_1\tau$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{a}{\omega_0^2}\left[1 - e^{-\beta t}\cos\omega_1 t - e^{-\beta t}\underbrace{\left[\frac{2\beta\omega_1}{\omega_0^2} - \frac{\beta}{\omega_1} + \frac{2\beta^2}{\omega_1\omega_0^2}\right]}_{\beta/\omega_1}\sin\omega_1 t\right]$$

$$\Rightarrow x(t) \simeq a/\omega_0^2\left[1 - e^{-\beta t}\cos\omega_1 t - \beta/\omega_1\, e^{-\beta t}\sin\omega_1 t\right] \checkmark$$