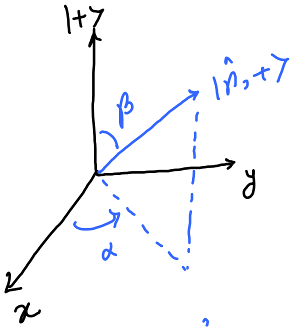
جلسه هفتم: برگشت زمان برای سیستم‌های اسپین $\frac{1}{2}$ — برهم‌کنش با میدان‌های E.M. و تبهگنی کرامرز

فصل ۵: روش‌های تقریبی — نظریه اختلال مستقل از زمان - حالت غیرتبهگن

برگشت زمان - سیستم اسپین $\frac{1}{2}$



$$|\hat{n},+\rangle = e^{-iS_z\alpha/\hbar}\, e^{-iS_y\beta/\hbar}\,|+\rangle$$

$$\Theta|\hat{n},+\rangle = e^{-iS_z\alpha/\hbar}\, e^{-iS_y\beta/\hbar}\,\Theta|+\rangle = \eta\,|\hat{n},-\rangle \quad ①$$

انتظار داریم

یادآوری جلسه پیش: $\Theta J_k \Theta^{-1} = -J_k$

$$\Theta\, e^{-iS_z\alpha/\hbar} = \Theta\left(1 - iS_z\alpha/\hbar + (-i\alpha/\hbar)^2 S_z^2 + \cdots\right) = \Theta - \alpha/\hbar\, \underbrace{\Theta(iS_z)}_{-i\Theta S_z = +iS_z\Theta} + (-i\alpha/\hbar)^2 S_z^2\Theta + \cdots$$

$$= \left(1 - iS_z\alpha/\hbar + (-i\alpha/\hbar)^2 S_z^2 + \cdots\right)\Theta = \exp(-iS_z\alpha/\hbar)\,\Theta$$

$$|\hat{n},-\rangle = e^{-iS_z\alpha/\hbar}\, e^{-iS_y(\beta+\pi)/\hbar}\,\underline{|+\rangle} \quad ②$$

$$①,② \Longrightarrow e^{-iS_z\alpha/\hbar}\, e^{-iS_y\beta/\hbar}\,\Theta|+\rangle = \eta\, e^{-iS_z\alpha/\hbar}\, e^{-iS_y(\beta+\pi)/\hbar}\,\underline{K|+\rangle}$$

$$\Longrightarrow \Theta|+\rangle = \eta\,\underbrace{e^{-iS_y\pi/\hbar}}_{\text{عملگر یکانی}:\ U} K|+\rangle \Longrightarrow \Theta = \eta\,\underbrace{e^{-iS_y\pi/\hbar}}_{D_y(\pi)} K = \eta\,\boxed{-2i/\hbar\; S_y K}$$

یادآوری: $e^{-i\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\,\phi/2} = 1\cos\phi/2 - i\,\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\sin\phi/2$

$$\hat{n}=\hat{y},\ \phi=\pi:\quad e^{-i\overset{2S_y/\hbar}{\sigma_y}\,\pi/2} = 1\,\cancel{\cos\pi/2}^{\,0} - i\,\sigma_y \sin\pi/2 = -i\,2/\hbar\; S_y$$

داشتیم: $S_y = \hbar/2\,\sigma_y$

اثر Θ روی کلی‌ترین کت اسپین $\frac{1}{2}$ چگونه است؟

$$\Theta\left(C_+|+\rangle + C_-|-\rangle\right) = C_+^*\left[-2i\eta/\hbar\, S_y\, \underbrace{K]|+\rangle}_{|+\rangle} + C_-^*\left[-2i\eta/\hbar\, S_y\, \underbrace{K]|-\rangle}_{|-\rangle}$$

$$2/\hbar\, S_y = \sigma_y \longrightarrow \sigma_y|+\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix} = i|-\rangle \qquad \sigma_y|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-i\\0\end{pmatrix} = -i|+\rangle$$

$$\Rightarrow \Theta\left(c_+|+\rangle + c_-|-\rangle\right) = c_+^*\left[-i\times i\eta|-\rangle\right] + c_-^*\left[-i\times(-i)\eta|+\rangle\right]$$

$$= \eta\left[c_+^*|-\rangle - c_-^*|+\rangle\right]$$

یک بار دیگر Θ را اثر می‌دهیم:

$$\Theta^2\left(c_+|+\rangle + c_-|-\rangle\right) = \Theta\eta\left[c_+^*|-\rangle - c_-^*|+\rangle\right]$$

$$= \eta^*\left[c_+\underbrace{\Theta|-\rangle}_{-\eta|+\rangle} - c_-\underbrace{\Theta|+\rangle}_{\eta|-\rangle}\right] = -\underbrace{|\eta|^2}_{1}\left(c_+|+\rangle + c_-|-\rangle\right)$$

قرار دادیم $|\eta|^2=1$

$$\Rightarrow \Theta^2|\alpha\rangle = -|\alpha\rangle \Rightarrow \boxed{\Theta^2 = -1}$$: برای اسپین $1/2$

همچنین داشتیم: $\Theta|l,m\rangle = (-1)^m|l,m\rangle$

$$\Theta^2|l,m\rangle = (-1)^m\,\Theta|l,m\rangle = (-1)^m(-1)^m|l,m\rangle = (-1)^{2m}|l,m\rangle = |l,m\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\Theta^2 = 1}$$: برای اندازه حرکت زاویه‌ای مداری

بطور کلی: $\Theta^2|\text{ذره صحیح}\rangle = |\text{ذره صحیح}\rangle$

$\Theta^2|\text{ذره نیمه صحیح}\rangle = -|\text{ذره نیمه صحیح}\rangle$

می‌خواهیم دو رابطه بالا را به شکل یک رابطه بنویسیم:

$$1\quad |\alpha\rangle = \sum_{j,m}|j,m\rangle\langle j,m|\alpha\rangle$$

$$\Theta|\alpha\rangle = \sum_{j,m}\underbrace{\Theta|j,m\rangle}_{\eta D_y(\pi)|j,m\rangle}\langle j,m|\alpha\rangle^* \longrightarrow \Theta^2|\alpha\rangle = \eta^*\sum\langle j,m|\alpha\rangle\underbrace{\Theta D_y(\pi)|j,m\rangle}_{?}$$

$$D_y(\pi) = e^{-iJ_y\pi/\hbar} = \sum \frac{1}{n!}\left(-i\pi/\hbar\right)^n J_y^n$$

$$\Theta J_k\Theta^{-1} = -J_k$$

$$\Theta J_k^2\Theta^{-1} = +J_k^2$$

$$\Theta J_k^n\Theta^{-1} = (-1)^n J_k^n$$

$$\Theta D_y(\pi) = \sum\frac{1}{n!}\left(+i\pi/\hbar\right)^n\underbrace{\Theta J_y^n}_{(-1)^n J_y^n\Theta}$$

$$\Rightarrow \Theta D_y(\pi) = \underbrace{\sum \frac{1}{n!}\left(\frac{-i\pi}{\hbar}\right)^n J_y^n}\,\Theta = \exp\left(-iJ_y\pi/\hbar\right)\Theta = D_y(\pi)\Theta$$

$$\Rightarrow \Theta^2|\alpha\rangle = \eta^* \sum \langle j,m|\alpha\rangle D_y(\pi)\underbrace{\Theta|j,m\rangle}_{\eta D_y(\pi)|j,m\rangle} = \cancel{|\eta|^2} D_y^2(\pi)\underbrace{\sum \langle j,m|\alpha\rangle |j,m\rangle}_{|\alpha\rangle}$$

$$\Rightarrow \Theta^2 = D_y^2(\pi) = \exp\left(-iJ_y\pi/\hbar\right)\exp\left(-iJ_y\pi/\hbar\right) = \exp\left(-iJ_y/\hbar\,(2\pi)\right) = D_y(2\pi)$$

$$\Rightarrow \Theta^2|j,m\rangle = D_y(2\pi)|j,m\rangle \longrightarrow \langle j,m'|D_y(2\pi)|j,m\rangle = d^{(j)}_{m'm}(2\pi)$$

داشتیم:

$$d^{(j)}_{m'm}(\beta) = \sum_k (-1)^{k-m+m'} \frac{\sqrt{(j+m)!(j+m')!(j-m)!(j-m')!}}{(j+m-k)!\,k!\,(j-k-m')!\,(k-m+m')!}\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2j-2k+m-m'} \times\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{2k-m+m'}$$

$$\beta = 2\pi \longrightarrow \sin\pi = 0 \Rightarrow d^{(j)}_{m'm}(2\pi) = 0$$: مگر این که توان سینوس صفر شود.

$$2k - m + m' = 0 \Rightarrow k = \frac{m-m'}{2} \;*$$

$$\Rightarrow \text{مخرج رابطه} = \left(j+m-\frac{m-m'}{2}\right)!\left(\frac{m-m'}{2}\right)!\left(j-\frac{m-m'}{2}-m'\right)!\left(\frac{m-m'}{2}-m+m'\right)!$$

$$= \left(j+m/2+m'/2\right)!\left(\frac{m-m'}{2}\right)!\left(j-m/2-m'/2\right)!\left(\frac{m'-m}{2}\right)!$$

$$k=0 \overset{*}{\Longleftarrow} m = m'$$ برای این که فاکتوریل ها صفر نشوند باید

$$\Rightarrow d^{(j)}_{m'm}(2\pi) = \frac{\sqrt{\cancel{(j+m)!}(j+m')!(j-m)!\cancel{(j-m')!}}}{\underbrace{\cancel{(j+m)!}}_{\sqrt{(j+m)!}}\,0!\,\underbrace{\cancel{(j-m')!}}_{\sqrt{(j-m')!}}\,0!}\left(\cos\frac{2\pi}{2}\right)^{2j} = (-1)^{2j}$$

$$\Rightarrow \Theta^2|j,m\rangle = D_y(2\pi)|j,m\rangle = (-1)^{2j}|j,m\rangle$$

برهم‌کنش با میدان‌های E و B و تبهگنی کرامرز

پتانسیل الکترواستاتیکی

$$V = -e\,\varphi(x)$$

فرض کنید یک الکترون در یک میدان استاتیک الکتریکی قرار دارد.

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Theta\, x\, \Theta^{-1} = x \;\Rightarrow\; \Theta\, V(x)\, \Theta^{-1} = V(x) \\ \Theta\, p\, \Theta^{-1} = -p \;\Rightarrow\; \Theta\, p^2\, \Theta^{-1} = p^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \Theta H \Theta^{-1} = H \;\Rightarrow\; \underbrace{[\Theta, H] = 0}$$

یعنی Θ ثابت حرکت است.

$$[\Theta, U] = [\Theta, e^{-iHt/\hbar}] \neq 0$$

$$\Theta U = \Theta e^{-iHt/\hbar} = \Theta \sum \left(\frac{-it}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} H^n = \sum \frac{1}{n!}\left(+\frac{it}{\hbar}\right)^n \underbrace{\Theta H^n} = \left(\sum \frac{1}{n!}\left(\frac{it}{\hbar}\right)^n H^n\right)\Theta$$

$$[H, \Theta] = 0 \longrightarrow H^n \Theta$$

$$\Rightarrow \Theta U = \exp(+iHt/\hbar)\,\Theta \;\Rightarrow\; \Theta U = U^\dagger \Theta \longrightarrow U\Theta \underbrace{UU^\dagger} = \underbrace{UU^\dagger}\Theta U^\dagger = \Theta U^\dagger$$

ویژه مقادیر Θ با زمان عوض می‌شوند پس هامیلتونی که با Θ جابجا شود، منجر به قانون بقایی نمی‌شود.

اگر H غیرتبهگن باشد (I)، $|n\rangle$ و $\Theta|n\rangle$ یکی هستند، پس توابع موج حقیقی هستند.

$$|n\rangle \to \psi \qquad \Theta|n\rangle \to \psi^*$$

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle$$

$$H(\Theta|n\rangle) = E_n(\Theta|n\rangle)$$

$$\Theta|n\rangle = e^{i\delta}|n\rangle \Rightarrow \Theta^2|n\rangle = \Theta(e^{i\delta}|n\rangle) = e^{-i\delta}\Theta|n\rangle = e^{-i\delta}e^{i\delta}|n\rangle = |n\rangle$$

$$\Rightarrow \Theta^2 = 1 \rightsquigarrow$$ نشان دادیم این رابطه هنگامی درست است که j صحیح باشد

یعنی یک سیستم بوزونی داشته باشیم پس برای یک سیستم فرمیونی، شرط $\Theta|n\rangle \propto |n\rangle$ صحیح نیست

پس در فرضیه (I)، H باید تبهگن باشد که آن را تبهگنی کرامرز می‌نامند که نتیجه ناوردایی H تحت TR است.

فصل پنجم: روش های تقریبی

نظریه اختلال مستقل از زمان در حالت غیر تبهگن

$$H_0 |n^0\rangle = E_n^0 |n^0\rangle$$

$H_{\text{جدید}} = H_0 + \lambda V$ ← V: مستقل از زمان

λ: پارامتر حقیقی و پیوسته.

$\lambda = 0 \rightarrow$ سامانه مختل نشده

$\lambda = 1 \rightarrow$ سامانه کاملاً مختل شده

$$H \underset{?}{|n\rangle} = \underset{?}{E_n} |n\rangle$$

تعریف می کنیم: $D_n = E_n - E_n^0 \Rightarrow (H_0 + \lambda V)|n\rangle = (E_n^0 + D_n)|n\rangle$

$$\Rightarrow (E_n^0 - H_0)|n\rangle = \overbrace{(\lambda V - D_n)|n\rangle}^{|\alpha\rangle} \quad (\text{I}) \Rightarrow |n\rangle = O^{-1}|\alpha\rangle$$

تعریف می کنیم: $\hat{O} \equiv E_n^0 \mathbb{1} - H_0 \Rightarrow \hat{O}^{-1} = \dfrac{1}{E_n^0 \mathbb{1} - H_0} \Rightarrow$

نکته اول: مخرج نباید صفر شود تا وارون داشته باشیم.

نکته دوم: O^{-1} چگونه بر روی کت ها اثر می کند.

$$\frac{1}{C - \hat{A}} = \frac{1}{C(1 - \hat{A}/C)} = \frac{1}{C}(1 - \hat{A}/C)^{-1} = \frac{1}{C}(1 + \hat{A}/C)$$

O^{-1} اگر بر روی $|n^0\rangle$ اثر کند، مخرج رابطه صفر می شود!!

راه حل:

$$(\lambda V - D_n)|n\rangle = |\alpha\rangle \xrightarrow{\text{I}} (E_n^0 - H_0)|n\rangle = |\alpha\rangle$$

$$\xrightarrow{\times \langle n^0|} E_n^0 \langle n^0|n\rangle - \underbrace{\langle n^0| H_0}_{E_n^0 \langle n^0|}|n\rangle = \langle n^0|\alpha\rangle \Rightarrow \langle n^0|\alpha\rangle = 0 \Rightarrow$$

$|\alpha\rangle$ اصلاً شامل $|n^0\rangle$ نیست پس نباید نگران صفر شدن O^{-1} باشیم.

$$|\alpha\rangle = \sum_{k \neq n} |k^0\rangle\langle k^0|\alpha\rangle$$

$$\sum_k |k^0\rangle\langle k^0| = \mathbb{1} \rightarrow \sum_{k\neq n} |k^0\rangle\langle k^0| + |n^0\rangle\langle n^0| = \mathbb{1}$$

تعریف می کنیم: $\Phi_n \equiv \mathbb{1} - |n^0\rangle\langle n^0| = \sum_{k \neq n} |k^0\rangle\langle k^0| \rightarrow$ این اپراتور چیست؟

$$\Phi_n |\alpha\rangle = \mathbb{1}|\alpha\rangle - |n^0\rangle \cancel{\langle n^0|\alpha\rangle}^{=0} = |\alpha\rangle \Rightarrow$$

اثر Φ_n ها سا اپراتور واحد است.

$$(\mathrm{I}) \longrightarrow |n\rangle = \frac{1}{E_n^0 - H_0} \underbrace{(\lambda V - D_n)|n\rangle}_{|\alpha\rangle \,=\, \Phi_n |\alpha\rangle} = \frac{1}{E_n^0 - H_0}\, \Phi_n \underbrace{(\lambda V - D_n)|n\rangle}_{|\alpha\rangle} \quad (\mathrm{II})$$

$$\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda V = 0 \,, \quad D_n = E_n - E_n^0 = 0 \Longrightarrow |n\rangle = 0 \quad \times$$

انتظار داشتیم $|n^0\rangle$ بدست آوریم

برای رفع مشکل، جمله $|n^0\rangle$ را به رابطه II اضافه می‌کنیم:

$$|n\rangle = \underbrace{C_n(\lambda)}_{?} |n^0\rangle + \frac{1}{E_n^0 - H^0}\, \Phi_n (\lambda V - D_n)|n\rangle$$

$$\lambda = 0 \Longrightarrow |n\rangle = C_n(0)|n^0\rangle = |n^0\rangle \Longrightarrow C_n(0) = 1$$

$$\times \langle n^0| \quad \langle n^0|n\rangle = C_n(\lambda) \underbrace{\langle n^0|n^0\rangle}_{1} + \langle n^0| \frac{1}{E_n^0 - H_0} \underbrace{\Phi_n}_{\sum_{k\neq n} |k^0\rangle\langle k^0|} (\lambda V - D_n)|n\rangle$$

$$\Longrightarrow \langle n^0|n\rangle = C_n(\lambda) + \sum_{k\neq n} \langle n^0| \underbrace{\frac{1}{E_n^0 - H_0} |k^0\rangle}_{\frac{1}{E_n^0 - E_k^0} |k^0\rangle} \langle k^0| (\lambda V - D_n)|n\rangle$$

$$\Longrightarrow \langle n^0|n\rangle = C_n(\lambda) + \sum_{k\neq n} \frac{1}{E_n^0 - E_k^0} \cancelto{0}{\langle n^0|k^0\rangle} \langle k^0| (\lambda V - D_n)|n\rangle$$

$$\longrightarrow C_n(\lambda) = \langle n^0|n\rangle \Longrightarrow |n\rangle = C_n(\lambda)|n^0\rangle + \frac{\Phi_n}{E_n^0 - H_0} \underbrace{(\lambda V - D_n)|n\rangle}_{|\alpha\rangle}$$

$$|\alpha\rangle = (\lambda V - D_n)|n\rangle \xrightarrow{\langle n^0|} \cancelto{0}{\langle n^0|\alpha\rangle} = \lambda \langle n^0|V|n\rangle - D_n \underbrace{\langle n^0|n\rangle}_{= C_n(\lambda) = 1}$$

قرارداد می‌کنیم

$$\Longrightarrow \boxed{D_n = \lambda \langle n^0|V|n\rangle} \quad \mathrm{III}$$

$$\begin{cases} \langle n^0|n\rangle = 1 \\ \langle n|n\rangle \neq 1 \end{cases}$$

: نرمالیزاسیون عملاً معنا ندارد

بعداً در مورد این صحبت می‌کنیم

$$\Rightarrow |n\rangle = |n^0\rangle + \frac{\Phi_n}{E_n^0 - H_0}(\lambda V - D_n)|n\rangle \qquad \text{IV}$$

$$\begin{cases} |n\rangle = |n^0\rangle + \lambda |n^1\rangle + \lambda^2 |n^2\rangle + \cdots & \text{V} \\ D_n = \lambda D_n^1 + \lambda^2 D_n^2 + \cdots \xrightarrow{\text{III}} \lambda D_n^1 + \lambda^2 D_n^2 + \cdots = \lambda \langle n^0|V\{|n^0\rangle + \lambda|n^1\rangle + \lambda^2|n^2\rangle + \cdots\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{D_n^{(1)} = \langle n^0|V|n^0\rangle = V_{nn}}$$

$$D_n^{(2)} = \langle n^0|V|n^1\rangle$$

$$D_n^{(3)} = \langle n^0|V|n^2\rangle \qquad \rightsquigarrow D_n \text{ مراتب مختلف اختلال برای}$$

$$\vdots$$

$$D_n^{(N)} = \langle n^0|V|n^{N-1}\rangle$$

رابطه V را در رابطه IV می‌گذاریم:

$$|n^0\rangle + \lambda|n^1\rangle + \lambda^2|n^2\rangle + \cdots = |n^0\rangle + \frac{\Phi_n}{E_n^0 - H_0}(\lambda V - \lambda D_n^1 - \lambda^2 D_n^2 + \cdots)(|n^0\rangle + \lambda|n^1\rangle + \cdots)$$

ضریب λ :

$$|n^1\rangle = \frac{\Phi_n}{E_n^0 - H_0} V|n^0\rangle - D_n^1 \cancel{\frac{\Phi_n}{E_n^0 - H_0}|n^0\rangle}^{\,0} \Rightarrow |n^1\rangle = \frac{\Phi_n V}{E_n^0 - H_0}|n^0\rangle$$

$$\Phi_n = \sum_{k\neq n} |k^0\rangle\langle k^0|$$

$$\Rightarrow \boxed{|n^1\rangle = \sum_{k\neq n} \frac{|k^0\rangle \overbrace{\langle k^0|V|n^0\rangle}^{V_{kn}}}{E_n^0 - E_k^0}} \qquad (*)$$

ضریب λ^2 :

$$\Phi_n = \sum_{l\neq n} |l^0\rangle\langle l^0|$$

$$|n^2\rangle = \frac{\Phi_n}{E_n^0 - H_0} V|n^1\rangle + \underbrace{D_n^1}_{V_{nn}} \frac{\Phi_n}{E_n^0 - H_0}|n^1\rangle - D_n^2 \cancel{\frac{\Phi_n}{E_n^0 - H_0}|n^0\rangle}^{\,0}$$

قبلاً نشان دادیم که این جمله صفر است.

اکنون $|n^1\rangle$ را از رابطه * جایگذاری می‌کنیم.

$$|n^2\rangle \text{ جمله اول} = \underbrace{\frac{1}{E_n^0 - H_0}\sum_{l\neq n}|l^0\rangle}_{\frac{1}{E_n^0 - E_l^0}|l^0\rangle}\langle l^0|V\Big(\underbrace{\sum_{k\neq n}|k^0\rangle}_{V_{ln}}\frac{V_{kn}}{E_n^0 - E_k^0}\Big)$$

$$|n^2\rangle_{\text{جمله دوم}} = V_{nn} \underbrace{\frac{1}{E_n^0 - H_0} \sum_{l\neq n} |l^0\rangle}_{\frac{1}{E_n^0 - E_l^0}} \underbrace{\langle l^0| \sum_{k\neq n} |k^0\rangle}_{\delta_{lk}} \frac{V_{kn}}{E_n^0 - E_k^0}$$

$$\Rightarrow |n^2\rangle = \sum_{\substack{l\neq n \\ k\neq n}} \frac{V_{lk} V_{kn}}{(E_n^0 - E_l^0)(E_n^0 - E_k^0)} |l^0\rangle - \sum_{k\neq n} \frac{V_{nn} V_{kn}}{(E_n^0 - E_k^0)^2} |k^0\rangle$$

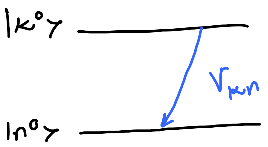
حال D_n^2 را می‌یابیم:

$$D_n^2 = \langle n^0 | V | n^1 \rangle = \sum_{k\neq n} \langle n^0 | V | k^0 \rangle \frac{V_{kn}}{E_n^0 - E_k^0} \Rightarrow D_n^{(2)} = \sum_{k\neq n} \frac{|V_{nk}|^2}{E_n^0 - E_k^0}$$

چون V هرمیتی است: $V_{nk} = V_{kn}^*$

می‌توان این طور بررسی کرد که:

در مرتبه اول $|n^1\rangle \propto V_{kn}$ ، مثل این است که یک گذار از k به n داریم.



در مرتبه دوم $|n^2\rangle \propto V_{kl} V_{ln}$ که شبیه این است که یک گذار میانی داریم