جلسه هشتم

پدیده رزونانس (تشدید) ← تشدید دامنه

↙ تشدید انرژی

اصل برهم‌نهی   سری فوریه   نیروهای ضربه‌ای

رزونانس

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \underbrace{A\cos\omega t}_{\text{نیروی محرک}} \qquad \omega_0 = \sqrt{k/m} \;:\; \text{فرکانس طبیعی سیستم}$$

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t)$$

جواب پایا

$$x_p(t) = \overbrace{\frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}}}^{D}\cos(\omega t - \delta) \;;\quad \delta = \tan^{-1}\left(\frac{2\omega\beta}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$$

: اختلاف فاز بین نیروی محرک و پاسخ سیستم

جواب گذرا

$$x_c(t) = e^{-\beta t}\left\{A_1 \exp\left(\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t\right) + A_2 \exp\left(-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t\right)\right\}$$

می‌خواهیم ببینیم که در چه فرکانسی، دامنه D به مقدار بیشینه خودش می‌رسد: ω_R

$$\left.\frac{dD}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_R} = 0 \Longrightarrow \frac{d}{d\omega}\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\right]^{-1/2} = 0$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{2}\left\{\underbrace{2(-2\omega)(\omega_0^2-\omega^2) + 8\beta^2\omega}_{=0}\right\}\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\right]^{-3/2} = 0$$

$$\Longrightarrow -\cancel{4}\cancel{\omega_R}(\omega_0^2-\omega_R^2) + \cancel{8}^{\,2}\beta^2\cancel{\omega_R} = 0 \Longrightarrow \omega_R^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$$

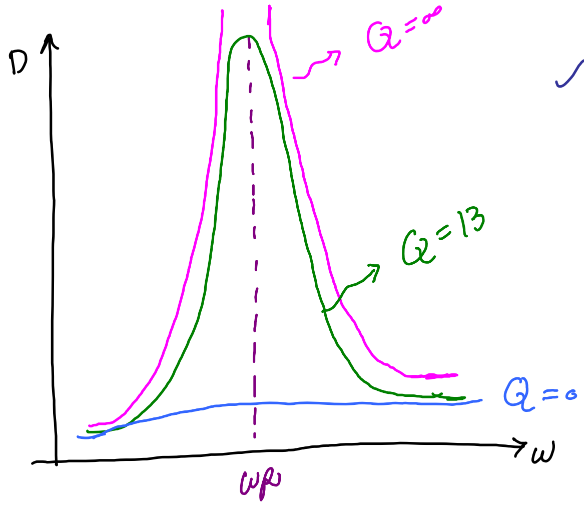
: فرکانس تشدید

الف) نوسان آزاد : $\omega_0^2 = k/m$

ب) نوسان کندمیرا : $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ $\qquad \omega_0 > \omega_1 > \omega_R$

ج) نوسان واداشته همراه با میرایی : $\omega_R^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$

$Q = \frac{\omega_R}{2\beta}$ ضریب کیفیت (quality factor) ⟶ نشان می‌دهد که اگر میرایی سیستم کم باشد کیفیت نوسان سیستم بیشتر است و برعکس



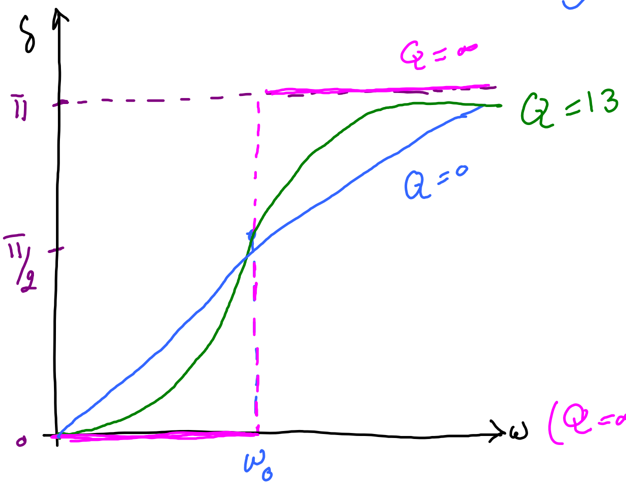
اگر $\beta=0 \Rightarrow Q\to\infty$

$$\omega_R=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}=\omega_0 \Rightarrow D=\frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\cancel{\beta^2}}}$$

0

$$\Rightarrow D\Big|_{\omega=\omega_R}=\frac{A}{\omega_0^2-\omega_0^2}\to\infty$$

اگر $\beta\to\infty \Rightarrow Q=0 \Rightarrow D\Big|_{\omega_R}\to 0$



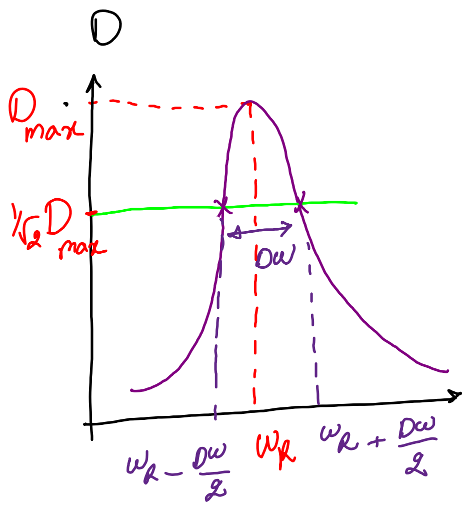
$$\delta=\tan^{-1}\left(\frac{2\omega\beta}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$$

$\omega=\omega_0$

$$\delta=\tan^{-1}\infty=\pi/2$$

اگر $(Q=\infty)$ $\beta=0 \longrightarrow \delta=\tan^{-1}0=0$ و π

مثال: نشان دهید که برای نوسانهای کند میرا که $Q=\frac{\omega_0}{D\omega}$ است که ω_0 بازه فرکانسی بین نقاطی است که دامنه آنها $1/\sqrt{2}$ برابر دامنه تشدید است.



۱) پیدا کردن D_{max} ← دامنه در $\omega=\omega_R$

$$D=\frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}} \quad *$$

$$D_{max}=D\left(\omega=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}\right)=\frac{A}{\sqrt{(\cancel{\omega_0^2}-\cancel{\omega_0^2}+2\beta^2)^2+4(\omega_0^2-2\beta^2)\beta^2}}$$

$$4\beta^4+4\omega_0^2\beta^2-8\beta^4$$

$$\Rightarrow D_{max}=\frac{A}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$

۲) یافتن فرکانس هایی که دامنه آنها $\frac{1}{\sqrt{2}}D_{max}$ است.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}D_{max}=\frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}}$$

اکنون در رابطه * دامنه D معلوم است و ω را باید بیابیم.

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cancel{A}}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}} = \frac{\cancel{A}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

$$\Rightarrow 8\beta^2(\omega_0^2-\beta^2) = (\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2 \Rightarrow \omega^4 + 2\omega^2\overbrace{(2\beta^2-\omega_0^2)}^{b'} + \underbrace{\omega_0^4 - 8\beta^2(\omega_0^2-\beta^2)}_{c} = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = -(2\beta^2-\omega_0^2) \mp \sqrt{\underbrace{(2\beta^2-\omega_0^2)^2 + 8\beta^2(\omega_0^2-\beta^2)}-\omega_0^4}$$

$$-\cancel{\omega_0^4} + 4\beta^4 - 4\beta^2\omega_0^2 + \cancel{\omega_0^4} + 8\beta^2\omega_0^2 - 8\beta^4 = -4\beta^4 + 4\beta^2\omega_0^2 = 4\beta^2\omega_0^2\left(1-\frac{\beta^2}{\omega_0^2}\right)$$

$$\rightarrow \omega^2 = -(2\beta^2-\omega_0^2) \mp 2\beta\omega_0\sqrt{1-\beta^2/\omega_0^2}$$

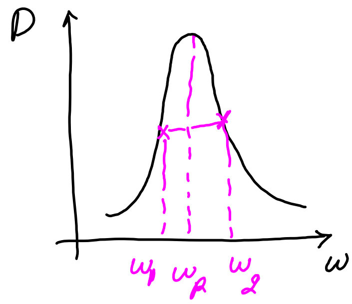
نوسان ضعیف ، β کوچک $\Rightarrow$ ازتقریبها β کوچک فرض می‌کنیم $\Rightarrow \beta^2/\omega_0^2 \to 0 \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 \mp 2\beta\omega_0$

$$\beta^2 \to 0 \qquad \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2\left(1 \mp \frac{2\beta}{\omega_0}\right)$$

یادآوری : $(1+x)^{1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2}x$ (x کوچک)

$$\Rightarrow \omega = \omega_0\sqrt{1 \mp 2\beta/\omega_0}$$

چون β کوچک است $\Rightarrow \omega = \omega_0\left(1 \mp 2\beta/\omega_0 \times \frac{1}{2}\right) = \omega_0\left(1 \mp \beta/\omega_0\right)$



$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0(1-\beta/\omega_0) \\ \omega_2 &= \omega_0(1+\beta/\omega_0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\beta$$

داشتیم : $Q = \frac{\omega_R}{2\beta} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \cancel{2\beta^2}}}{2\beta} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ ✓

تشدید انرژی

انرژی جنبشی

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

$$x(t) = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}}\cos(\omega t-\delta) \Rightarrow \dot{x} = \frac{-A\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}}\sin(\omega t-\delta)$$

$$\Longrightarrow T = \frac{1}{2} m A^2 \frac{\omega^2 \sin^2(\omega t-\delta)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}$$

روی T از ۰ تا τ (دوره) انتگرال می‌گیریم تا مقدار متوسط آن را بیابیم.

$$\Longrightarrow \langle T\rangle = \frac{1}{2} m A^2 \frac{\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}\underbrace{\langle \sin^2(\omega t-\delta)\rangle} \longrightarrow \frac{1}{\tau}\int_0^{2\pi/\omega=\tau} \sin^2(\omega t-\delta)\,dt = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) \longrightarrow \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{(2\pi-0)}{2}$$

$$\Longrightarrow \langle T\rangle = \frac{1}{4} m A^2 \frac{\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}$$

$$\left.\frac{d\langle T\rangle}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_E} = 0 \Longrightarrow 2\cancel{\omega}\left\{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2\right\} - \left\{-4\omega(\omega_0^2-\omega^2)+8\omega\beta^2\right\}\times\omega^{\cancel{2}} = 0$$

$$(\omega_0^2-\omega^2)\left\{2\omega_0^2 \underbrace{-2\omega^2+4\omega^2}_{2\omega^2}\right\} + \cancel{8\omega^2\beta^2} - \cancel{8\omega^2\beta^2} = 0$$

$$\Longrightarrow (\omega_0^2-\omega^2)^2 = 0 \Longrightarrow \omega_E = \omega_0 \longrightarrow$$

انرژی جنبشی در فرکانس طبیعی سیستم بیشینه می‌شود.

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 \frac{A^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}\cos^2(\omega t-\delta) \qquad \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$\langle U\rangle = \frac{1}{4} m A^2 \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}$$

$$\left.\frac{d\langle U\rangle}{d\omega}\right| = 0 \Longrightarrow -4\cancel{\omega}(\omega_0^2-\omega^2)+8\cancel{\omega}\beta^2 = 0 \Longrightarrow \omega^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2 \Longrightarrow \omega=\omega_R \xrightarrow{\beta=0} \omega=\omega_0$$

انرژی پتانسیل در فرکانس تشدید، بیشینه می‌شود.

به دلیل وجود میرایی، فرکانس تشدید U و T با هم متفاوت است. پس انرژی مکانیکی سیستم ثابت نیست.

$$\langle E\rangle = \langle U\rangle + \langle T\rangle = \frac{1}{4} m A^2 \frac{\omega_0^2+\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}$$

اصل برهم نهی - سری فوریه

قضیه: فرض کنید مجموعه‌ای از توابع $x_n(t)\{n=1,2,...\}$ داشته باشیم که حل معادله $m\ddot{x}_n + b\dot{x}_n + kx_n = F_n(t)$ باشند

و همچنین داشته باشیم: $F(t) = \sum F_n(t)$. در این حالت $x(t) = \sum x_n(t)$ در معادله $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)$ صدق می‌کند.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = m\sum \ddot{x}_n + b\sum \dot{x}_n + k\sum x_n = \sum \underbrace{m\ddot{x}_n + b\dot{x}_n + kx_n}_{F_n(t)} = F(t)$$

مشتق اول به توان ۳   توان ۴ متغیر

$$m\left(\frac{d\dot{x}}{dt}\right)^2 + b\left(dx/dt\right)^3 + kx^4 \quad :$$ یک معادله غیرخطی

مشتق دوم به توان ۲

علت این که ما می‌توانیم جواب معادله دیفرانسیل کلی $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F$ را بصورت برهم نهی تک تک جوابها (x_n) در نظر بگیریم این است که معادله فوق خطی است.

معادله‌ای که شامل خود متغیر و مشتق های مرتبه n اُم آن باشد.

برمی‌گردیم به مسأله نوسانگر:

فرض کنیم که نیروی $F(t)$ را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$F(t) = \sum_n \left(\alpha_n \cos(\omega_n t - \phi_n)\right) \longrightarrow x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_n^2)^2 + 4\omega_n^2\beta^2}} \cos(\omega_n t - \phi_n - \delta_n) \quad *$$

جواب پایدار

در حلقه قبل یک نوسانگر با نیروی محرک سینوسی

$(F\cos\omega t)$ را از این نوع را حل کردیم

$$\longrightarrow x_p(t) = \frac{A = F/m}{\sqrt{\cdots}} \cos(\omega t - \delta)$$

کمی فرمس را باز می‌کنیم

$$F(t) = \sum_n \alpha_n \{\cos\omega_n t \cos\phi_n + \sin\omega_n t \sin\phi_n\}$$

سری فوریه

$$\Longrightarrow \boxed{F(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t\right)}$$

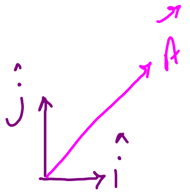
اسم‌گذاری جدید: $\alpha_n\cos\phi_n = A_n$, $\alpha_n \sin\phi_n = B_n$

رابطه * هم با این اسم‌گذاری جدید عوض می‌شود،

$$x(t) = \sum_n \frac{A_n\cos(\omega_n t - \delta_n) + B_n \sin(\omega_n t - \delta_n)}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_n^2) + 4\omega_n^2\beta^2}}$$

اگر نیروی F، یک نیروی پریودیک باشد $F(t)=F(t+\tau)$، می توان آن را برحسب توابع مستقل خطی پریودیک مثل sin و cos بسط داد.

$$F(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\{A_n\cos(n\omega t)+B_n\sin(n\omega t)\}$$



$\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}$

$\hat{i}\cdot\hat{j}=0$

sin و cos پایه های فضای توابع هستند. پس از هم مستقل هستند.

سؤال: چطور می توان فهمید توابع از هم مستقل هستند یا به هم وابسته اند؟

$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$

رانسکین

$$W=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x)\\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x)\\ \vdots & & & \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}=\begin{cases} 0 \longrightarrow & \text{توابع وابسته خطی هستند}\\ \neq 0 \longrightarrow & \text{" مستقل "}\\ \text{در بعضی حالات صفر و در بعضی حالات غیر صفر باشد} \longrightarrow & \text{تست رانسکین نمی تواند استقلال یا وابستگی خطی جواب ها را بدهد.}\end{cases}$$

مثال: $\sin x$ و $\cos x$ آیا مستقل هستند؟

$$W=\begin{vmatrix}\sin x & \cos x\\ \cos x & -\sin x\end{vmatrix}=-\sin^2 x-\cos^2 x=-1\neq 0 \Longrightarrow$$

$\sin x$ و $\cos x$ مستقل خطی هستند.

مثال: $\sinh x$ و e^{-x} و e^{+x} ؟

$$W=\begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} & \sinh x\\ e^{x} & -e^{-x} & \cosh x\\ e^{x} & e^{-x} & \sinh x\end{vmatrix}=0 \longrightarrow$$

این توابع وابسته هستند

مثال: x و x^2 و x^3 ؟

$$W=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3\\ 1 & 2x & 3x^2\\ 0 & 2 & 6x\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} x & x^3\\ 1 & 3x^2\end{vmatrix}+6x\begin{vmatrix} x & x^2\\ 1 & 2x\end{vmatrix}$$

$$=-2(3x^3-x^3)+6x(2x^2-x^2)=-4x^3+6x^3=2x^3$$

در $x=0$، برابر صفر و برای $x\neq 0$، $W\neq 0$ است. (ما می دانیم این توابع مستقل هستند.)