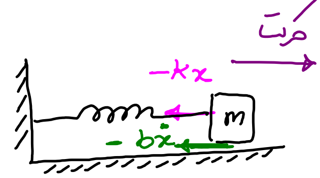
جلسه هفتم : نوسان میرا ← کندمیرا ، میرایی بحرانی ، تندمیرا

نیروهای حرکت سینوسی ← تشدید

نوسانهای میرا

← حرکت ذره تحت تاثیر یک نیروی اصطکاک است : $-b\dot{x}$ $\quad (b>0)$

+ نیروی فنر



قانون دوم : $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$

$$\Longrightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \Longrightarrow \ddot{x} + \overset{2\beta}{b/m}\,\dot{x} + \overset{\omega_0^2}{k/m}\,x = 0$$

$$k/m \equiv \omega_0^2 \quad , \quad \beta \equiv \frac{b}{2m}$$: ضریب میرایی

برای حل معادله دیفرانسیل : $y = e^{rx}$ (حدس)

$$y'' + ay' + by = 0 \Longrightarrow (r^2 + ar + b)e^{rx} = 0 \Longrightarrow r^2 + ar + b = 0$$

$$\Longrightarrow r_{1,2} = -a/2 \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} \longrightarrow$$ الف) اگر $r_1 \neq r_2 \Longrightarrow y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

$a^2 - 4b = 0$: ب) اگر $r_1 = r_2 = r \Longrightarrow y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$

برمی‌گردیم به مسأله خودمان :

$$r_{1,2} = -\beta \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2} \longrightarrow r_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$r_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

الف) $\omega_0^2 > \beta^2$: کندمیرا ب) $\omega_0^2 = \beta^2$: میرایی بحرانی ج) $\omega_0^2 < \beta^2$: تندمیرا

الف - کندمیرا

$$\omega_1^2 \equiv \omega_0^2 - \beta^2 > 0 \Longrightarrow r_1 = -\beta + \sqrt{\overset{i^2}{-}\omega_1^2} = -\beta + i\omega_1$$

$$r_2 = -\beta - \sqrt{\overset{i^2}{-}\omega_1^2} = -\beta - i\omega_1$$

$$\Longrightarrow x(t) = A_1 e^{(-\beta + i\omega_1)t} + A_2 e^{(-\beta - i\omega_1)t} = e^{-\beta t}\left\{ \underset{\frac{1}{2}Ae^{-i\delta}}{A_1} e^{+i\omega_1 t} + \underset{\frac{1}{2}Ae^{i\delta}}{A_2} e^{-i\omega_1 t} \right\}$$

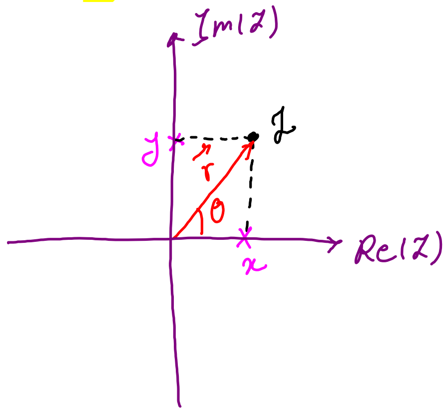
$$\Rightarrow x(t) = e^{-\beta t}\frac{A}{\cancel{2}}\left\{ e^{i(\omega_1 t-\delta)} + \underbrace{e^{-i(\omega_1 t-\delta)}}_{\cancel{2}\cos(\omega_1 t-\delta)} \right\}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

دامنه حرکت

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega_1 t-\delta)}$$



توضیح در مورد اعداد مختلط (Z)

نمایش جبری : $Z = x + iy$

$x, y \in \mathbb{R}$

نمایش قطبی : $Z = re^{i\theta}$; $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\cos\theta + i\sin\theta$ $\qquad \theta = \tan^{-1} y/x$

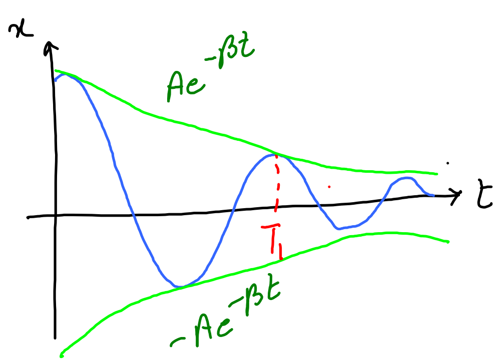
مثال : $Z = 1+i \Rightarrow r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\theta = \tan^{-1} 1/1 = \pi/4$

$\Rightarrow Z = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

فاز عدد Z

اندازه یا مدول عدد Z



T_1 : فاصله زمانی بین دو نقطه ماکزیمم : $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$

بعد از زمان T_1، دامنه حرکت چقدر افت کرده است؟

دامنه حرکت $= Ae^{-\beta t}$

$t = 0 \longrightarrow a_1 = A$

$t = T_1 \longrightarrow a_2 = Ae^{-\beta T_1}$

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{e^{-\beta T_1}} = e^{\beta T_1}$

نزول حرکت

$\ln e^{\beta T_1} = \beta T_1$: نزول لگاریتمی حرکت

انرژی سیستم

(1)

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega_1 t-\delta) \Longrightarrow \dot{x} = A(-\beta)e^{-\beta t}\cos(\omega_1 t-\delta) - Ae^{-\beta t}\omega_1\sin(\omega_1 t-\delta)$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2 = A^2 e^{-2\beta t}\left\{\beta^2\cos^2(\omega_1 t-\delta) + \omega_1^2\sin^2(\omega_1 t-\delta) + 2\beta\omega_1\sin(\omega_1 t-\delta)\cos(\omega_1 t-\delta)\right\}$$

فرض کنیم ضریب میرایی β در مقابل ω_0 کوچک باشد: $\beta \ll \omega_0 \longrightarrow \omega_1 \simeq \omega_0$

در این حالت، در رابطه ① می‌توان از جمله اول صرف‌نظر کرد:

$$\dot{x} = -A\omega_1 e^{-\beta t}\sin(\omega_1 t-\delta) \Longrightarrow \dot{x}^2 = A_1^2\omega_1^2 e^{-2\beta t}\sin^2(\omega_1 t-\delta)$$

$$\Longrightarrow E = \tfrac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 e^{-2\beta t}\cos^2(\omega_1 t-\delta) + \tfrac{1}{2}mA_1^2\underbrace{\omega_1^2}_{\simeq\,\omega_0^2}e^{-2\beta t}\sin^2(\omega_1 t-\delta)$$

$$\Longrightarrow E = \overbrace{\tfrac{1}{2}m\omega_0^2 A^2}^{E_0\,:\,\text{انرژی نوسانگر بدون میرایی}} e^{-2\beta t} \Longrightarrow E = E_0 e^{-2\beta t} < E_0$$

ب- میرایی بحرانی

$$\omega_0 = \beta \overset{r_1=r_2=-\beta}{\Longrightarrow} x(t) = (A+Bt)e^{-\beta t}$$

در این حالت، نوسان وجود ندارد و سیستم به صورت هموار و به سرعت به حالت تعادل خود می‌رسد.

ج- حرکت تندمیرا

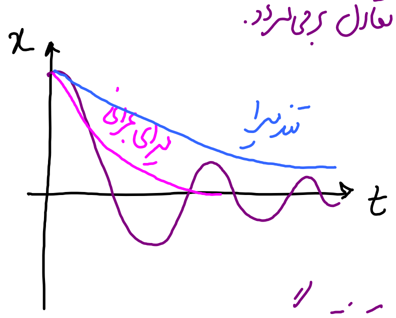
$$\omega_0^2 < \beta^2 \longrightarrow r_{1,2} = -\beta \mp \sqrt{\underset{>0}{\omega_0^2-\beta^2}} \qquad \omega_2^2 \equiv \omega_0^2-\beta^2$$

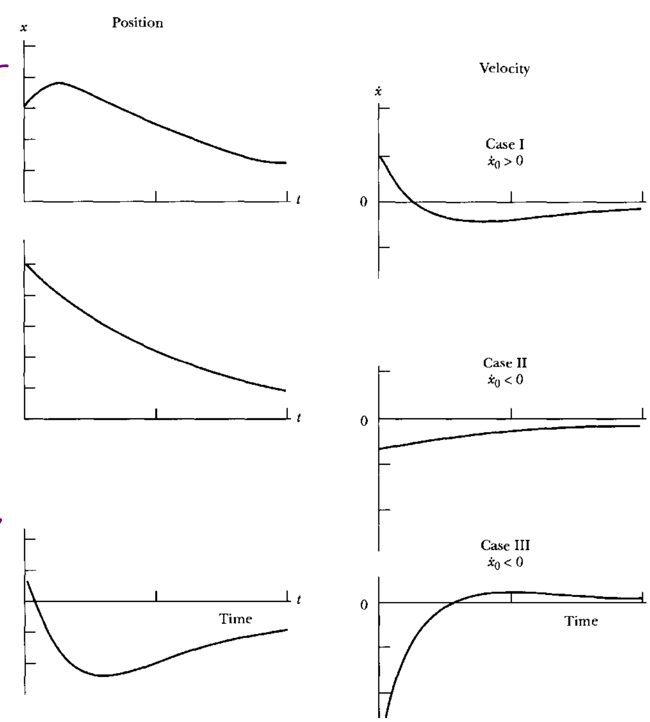
$$\Longrightarrow \begin{array}{l} r_1 = -\beta+\omega_2 \\ r_2 = -\beta-\omega_2 \end{array} \Longrightarrow x(t) = A_1 e^{-\beta t+\omega_2 t} + A_2 e^{-\beta t-\omega_2 t}$$

$$\Longrightarrow x(t) = e^{-\beta t}\left(A_1 e^{\omega_2 t} + A_2 e^{-\omega_2 t}\right)$$

سرعت اولیه مثبت است.

پس جسم ابتدا به یک max می‌رسد و سپس به صورت مجانبی مکان آن به حالت تعادل برمی‌گردد.



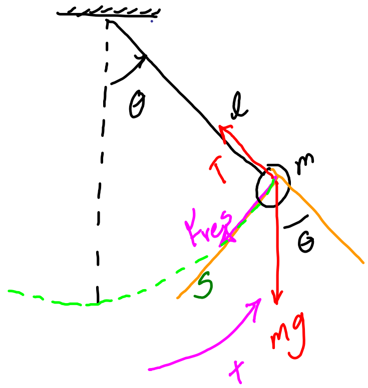


سرعت اولیه منفی است اما مقدار آن آنقدر بزرگ است که باعث می‌شود از نقطه صفر گذشته و به یک مینیمم منفی برسد و سپس مانند حالت‌های قبل به حالت تعادل برمی‌گردد.

مثال: آونگی به طول l را در نظر بگیرید. که گلوله‌ای به جرم m به انتهای آن آویخته شده است. نیروی مقاوم به صورت $F_{res} = 2m\sqrt{g/l}\,(l\dot{\theta})$ داده شده است، θ و $\dot{\theta}$ را بر حسب زمان بیابید و نمودار فاز این سیستم را رسم کنید.

شرایط اولیه:

$$\theta(t=0) = \alpha \quad و \quad \dot{\theta}(t=0) = 0$$



$$S = l\theta$$

$$\begin{cases} m\ddot{y} = T - mg\cos\theta \\ m\overset{\ddot{s}}{\ddot{x}} = -F_{res} - mg\sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cancel{m}l\ddot{\theta} + 2\cancel{m}\sqrt{g/l}\,(l\dot{\theta}) + \cancel{m}g\sin\theta = 0$$

برای زوایای کوچک $\sin\theta \simeq \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + 2\sqrt{g/l}\,\dot{\theta} + g/l\,\theta = 0 \qquad (\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0)$$

ضریب میرایی: β $\qquad \omega_0^2$

$\beta^2 = \omega_0^2 \longrightarrow$ میرایی بحرانی داریم

$$\Rightarrow \theta(t) = (A + Bt)e^{-\beta t} \xrightarrow{\text{شرایط اولیه}} \theta(t=0) = \boxed{\alpha = A}$$

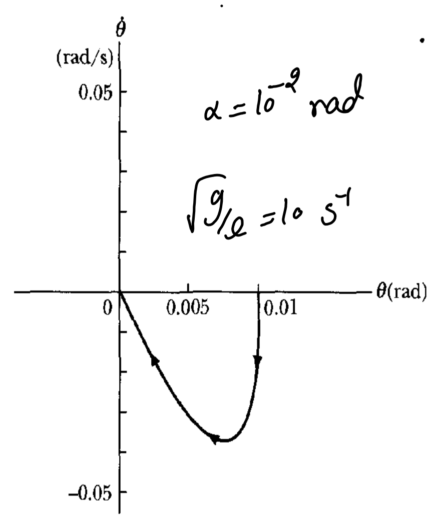
$$\dot{\theta}(t) = -\beta A e^{-\beta t} + B e^{-\beta t} + (-\beta)tBe^{-\beta t}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(t=0) = 0 \Rightarrow -\beta A + B = 0 \Rightarrow \boxed{B = \beta\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = \alpha(1 + \beta t)e^{-\beta t}}$$

$$\dot{\theta}(t) = (\cancel{-\beta\alpha} + \cancel{\beta\alpha} - \beta t(\beta\alpha))e^{-\beta t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta}(t) = -\beta^2\alpha t e^{-\beta t}}$$



$t = 0 \longrightarrow \theta = 10^{-2}\ \text{rad}$, $\dot{\theta} = 0$ $\longrightarrow$ برای بازه‌های زمانی $t=0$ از $0/001s$ تا $t = 0/5$ ثانیه نمودار را می‌توان رسم کرد.

نیروهای محرک سینوسی ← یک نیروی سینوسی به جسم به جرم m که تحت تأثیر نیروی فنر و نیروی مقاومت $-b\dot{x}$ است وارد می‌شود.

قانون دوم : $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_0\cos\omega t \Rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \underbrace{\frac{F_0}{m}}_{A}\cos\omega t$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = A\cos\omega t$$

← بسامد زاویه‌ای نیروی محرک

حل معادله دیفرانسیل : $x(t) = x_c(t) + x_p(t)$

جواب عمومی که از حل معادله با طرف ثانی برابر صفر بدست می‌آید

جواب خصوصی که بستگی به نیروی F دارد.

برای حالت کند میرا داشتیم : $x_c(t) = e^{-\beta t}\{A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{-i\omega_1 t}\}$; $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

حدس جواب خصوصی ، $x_p(t) = D\cos(\omega t - \delta)$ ← اختلاف فاز بین نیروی محرکه و حرکت نوسانی را نشان می‌دهد.

D و δ مجهولات مسأله هستند که باید از جاگذاری $x_p(t)$ در معادله دیفرانسیل مسأله برحسب A ، ω_0 و β بدست آیند.

$\dot{x}_p(t) = -D\omega\sin(\omega t - \delta)$

$\ddot{x}_p(t) = -D\omega^2\cos(\omega t - \delta)$

$\cos\omega t\cos\delta + \sin\omega t\sin\delta$ $\qquad$ $\sin\omega t\cos\delta - \cos\omega t\sin\delta$

$$\Rightarrow -D\omega^2\cos(\omega t-\delta) + 2\beta(-D\omega)\sin(\omega t-\delta) + \omega_0^2 D\cos(\omega t-\delta) = A\cos\omega t$$

$\cos\omega t\cos\delta + \sin\omega t\sin\delta$

$$\cos(\omega t)\{2\beta D\omega\sin\delta + \omega_0^2 D\cos\delta - D\omega^2\sin\delta - A\}$$

$$+ \sin(\omega t)\{-D\omega^2\sin\delta - 2\beta D\omega\cos\delta + \omega_0^2 D\sin\delta\} = 0$$

چون sin و cos توابع مستقل خطی هستند، در رابطه بالا، ضریب هرکدام باید برابر صفر باشد.

ضریب کسینوس:

$$\Rightarrow A - D\{(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\delta + 2\omega\beta\sin\delta\} = 0 \Rightarrow D = \frac{A}{(\omega_0^2-\omega^2)\cos\delta + 2\omega\beta\sin\delta}$$

ضریب سینوس : $-\cancel{D}\omega^2\sin\delta - 2\beta\cancel{D}\omega\cos\delta + \omega_0^2\cancel{D}\sin\delta = 0 \Rightarrow (\omega_0^2 - \omega^2)\sin\delta = 2\beta\omega\cos\delta$

$$\Rightarrow \tan\delta = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \Rightarrow \boxed{\delta = \tan^{-1}\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}} \; *$$

$$\sin\delta = \frac{\tan\delta}{\sqrt{1+\tan^2\delta}} \Rightarrow \sin\delta = \frac{2\omega\beta}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}} \ , \ \cos\delta = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}}$$

$\sin\delta$ و $\cos\delta$ را در رابطه D می‌گذاریم:

$$D = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}}$$

$$* : \begin{cases} \omega = 0 \longrightarrow \delta = \tan^{-1} 0 = 0 \\ \omega = \omega_0 \longrightarrow \delta = \tan^{-1}\infty = \pi/2 \\ \omega \to \infty \longrightarrow \delta = \pi \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x(t) = \underbrace{x_c(t)}_{\text{جمله گذرا}} + \overbrace{x_p(t)}^{\text{جمله پایا}}$$

$$x_p(t) = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}} \cos(\omega t-\delta) \longrightarrow$$

این جمله بعد از گذشت زمان اهمیت پیدا می‌کند.

$$x_c(t) = e^{-\beta t}\left\{A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{-i\omega_1 t}\right\} \longrightarrow$$

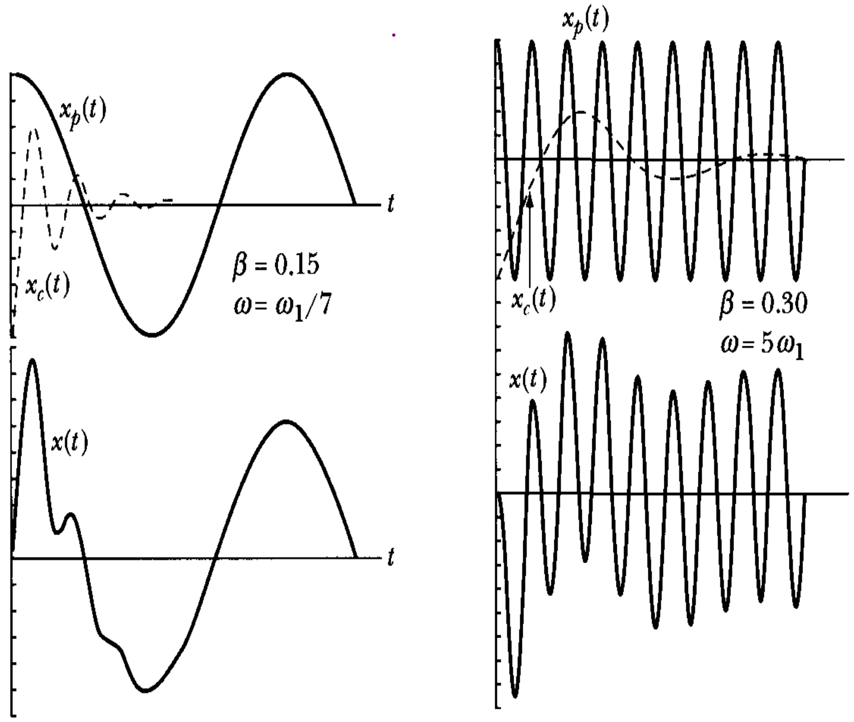
$t \gg 1/\beta$

این جمله پس از گذشت زمان $(t\to\infty)$ اثری ندارد پس به آن جمله گذرا می‌گوییم.

این جمله افت دامنه را نشان می‌دهد

وقتی $t = \tau = 1/\beta$ است، دامنه حرکت به $1/e$ مقدار بیشینه خود می‌رسد

به زمان $1/\beta$ زمان مشخصه سیستم می‌گوییم



(a) (b)