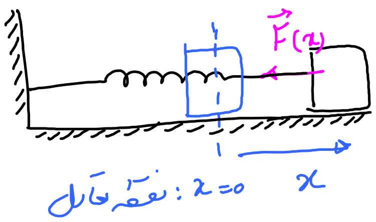
جلسه ششم: فصل سوم: نوسانات

قانون هوک

فضای فاز

نوسانگرهای هماهنگ ساده ← تک بعدی

دو بعدی ← منحنی های لیساژو



قانون هوک

۱) فرض می‌کنیم نیروی برگرداننده فنر تابع مکان است: $\vec F(x)$

۲) " " این نیرو دارای مشتقات پیوسته باشد (تا همه مراتب مشتق)

نیرو را حول نقطه x_0 بسط می‌دهیم:

صرف نظر می‌کنیم چون x کوچک است.

$$F(x)=F(x_0)+(x-x_0)\frac{dF}{dx}\Big|_{x_0}+\frac{1}{2!}(x-x_0)^2\frac{d^2F}{dx^2}\Big|_{x_0}+\cdots$$

اگر $x_0=0$: نقطه تعادل $\Longrightarrow F(x_0=0)=0 \Longrightarrow F(x)=x\underbrace{\frac{dF}{dx}\Big|_{x_0}}_{-k}$

$$\Longrightarrow \boxed{F(x)=-kx}$$: قانون هوک

نوسانگر هماهنگ ساده تک بعدی

قانون دوم: $F=m\ddot x \Longrightarrow -kx=m\ddot x \Longrightarrow \ddot x+\frac{k}{m}x=0$ و $\sqrt{k/m}=\omega_0$

فرکانس زاویه‌ای و با دیمانسیون $\left(\frac{1}{\text{ثانیه}}\right)$

$$\Longrightarrow \ddot x+\omega_0^2 x=0 \Longrightarrow x=a\sin\omega_0 t+b\cos\omega_0 t$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x=A\sin(\omega_0 t+\delta) \quad (1) = \underbrace{A\cos\delta}_{a}\sin\omega_0 t + \underbrace{A\sin\delta}_{b}\cos\omega_0 t \\ x=A\cos(\omega_0 t+\delta) \end{cases}$$

دامنه حرکت ← A

فاز حرکت → $x(t=0)=A\sin\delta$

مثال: $A=10$ و $x(t=0)=7$ ← $7=10\sin\delta$

$\Longrightarrow \sin\delta=0.7 \Longrightarrow \delta=\pi/4$. فاز اولیه حرکت

انرژی

$$E=T+U$$

$$\vec F=-\vec\nabla U \xrightarrow[\text{حالت تک بعدی}]{} U=-\int F\,dx=\int kx\,dx=\tfrac{1}{2}kx^2$$

$$U=\tfrac{1}{2}m\omega_0^2A^2\sin^2(\omega_0 t+\delta)$$

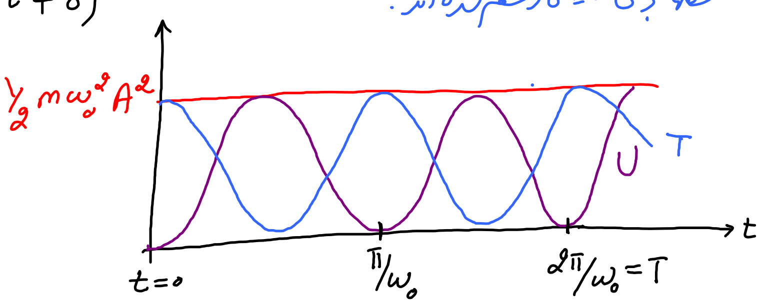
$$(1):\ \dot x=A\omega_0\cos(\omega_0 t+\delta)$$

$$T=\tfrac{1}{2}mv^2=\tfrac{1}{2}m\dot x^2=\tfrac{1}{2}mA^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t+\delta)$$

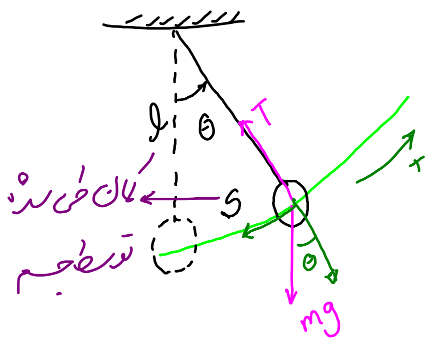
$$\Longrightarrow E=\tfrac{1}{2}mA^2\omega_0^2=\text{ثابت}$$

انرژی پایسته است.

شکلها برای $\delta=0$ رسم شده اند.



مثال ۱: حرکت آونگ ساده



$$\begin{cases} T = mg\cos\theta \\ -\cancel{m}g\sin\theta = ma = \cancel{m}\ddot{s} \end{cases} \Longrightarrow -g\sin\theta = l\ddot{\theta}$$

$$\Downarrow$$

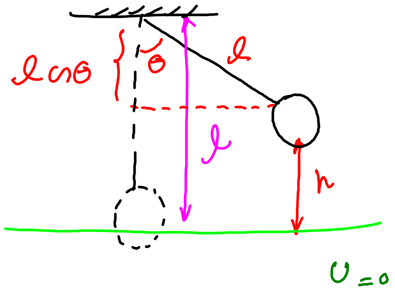
$$s = l\theta \Longrightarrow \ddot{s} = l\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta \quad (\ddot{x} = -\omega_0^2 x)$$

اگر زاویه θ کمتر از 6° باشد:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta \; ; \; \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \Longleftarrow \sin\theta \simeq \theta$$

انرژی



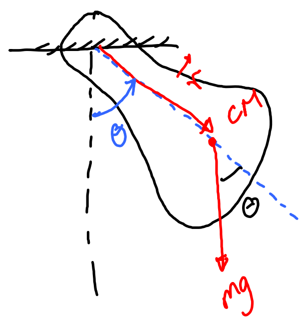
$$U = mgh = mg(l - l\cos\theta) = mgl(\underbrace{1-\cos\theta}_{2\sin^2\theta/2 \,=\, 2(\theta/2)^2 \,=\, \frac{1}{2}\theta^2})$$

$$\longrightarrow U = \frac{1}{2}mgl\theta^2 \quad \left(U = \frac{1}{2}kx^2\right)$$

روش دوم: $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \underbrace{\frac{\theta^4}{4!} - \cdots}_{\text{صرف‌نظر میشیم}} \Longrightarrow U = mgl\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2!}\right) = \frac{1}{2}mgl\theta^2$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \Longrightarrow E = \frac{1}{2}ml(g\theta^2 + l\dot{\theta}^2) = \text{ثابت}$$

مثال ۲: حرکت آونگ فیزیکی



قانون دوم نیوتن: $\underset{\text{گشتاور}}{N} = \overset{\text{لختی دورانی}}{I}\,\underset{\text{شتاب زاویه‌ای}}{\alpha} \longleftrightarrow F = ma$

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \Longrightarrow N = -rmg\sin\theta$$ ، جهت گشتاور درون سو است

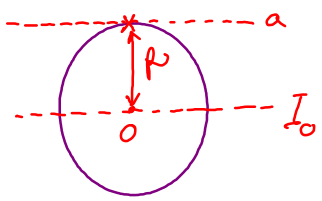
$$\Longrightarrow -rmg\sin\theta = I\ddot{\theta} \xrightarrow[\sin\theta \simeq \theta]{\text{زوایای کوچک}} \ddot{\theta} = -\overbrace{\frac{rmg}{I}}^{\omega^2}\theta \quad (\ddot{x} = -\omega^2 x)$$

$$\Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{rmg}{I}}$$

فاصله مرکز جرم تا تکیه‌گاه (r)

لختی دورانی جسم نسبت به تکیه‌گاه (I)

حالت خاص: آونگ فیزیکی کروی



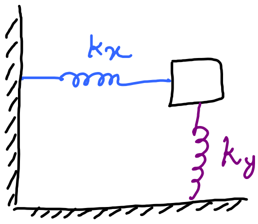
$I_0 = \frac{2}{5}MR^2$: لختی دورانی کره‌ای به شعاع R نسبت به مرکز کره

قضیه محورهای موازی: $I_a = I_0 + M\underset{\text{فاصله بین دو محور O و a}}{a^2}$

$$I_a = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{RMg}{\frac{7}{5}MR^2}} = \sqrt{\frac{5}{7}\frac{g}{R}}$$

نوسانگر هماهنگ ساده دوبعدی



$$\vec{F} = -k\vec{r} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -k_x x = m\ddot{x} & \rightarrow \ddot{x} + \omega_x^2 x = 0 \\ -k_y y = m\ddot{y} & \rightarrow \ddot{y} + \omega_y^2 y = 0 \end{cases} \qquad \omega_x = \sqrt{\frac{k_x}{m}} \qquad \omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x(t) = A\cos(\omega_x t - \alpha) & (I) \\ y(t) = B\cos(\omega_y t - \beta) \end{cases}$$

حالت خاص: فرض کنیم $\omega_x = \omega_y = \omega$

$$y(t) = B\cos\{(\omega t - \alpha) + \overbrace{(\alpha - \beta)}^{\delta}\}$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

$$y(t) = B\cos(\omega t - \alpha)\cos\delta - B\sin(\omega t - \alpha)\sin\delta$$

$$I: \ \frac{x}{A} \qquad \sqrt{1-\cos^2(\omega t - \alpha)} = \sqrt{1 - x^2/A^2}$$

$$\xrightarrow{\times A} yA = Bx\cos\delta - B\sqrt{1 - x^2/A^2}\,A\sin\delta \rightarrow B^2\left(1 - x^2/A^2\right)A^2\sin^2\delta = B^2x^2\cos^2\delta + y^2A^2 - 2BAxy\cos\delta$$

$$\rightarrow B^2A^2\sin^2\delta - B^2x^2\sin^2\delta = B^2x^2\cos^2\delta + y^2A^2 - 2ABxy\cos\delta$$

$$\Rightarrow y^2A^2 + B^2x^2 - 2ABxy\cos\delta = B^2A^2\sin^2\delta$$

حالت الف) $\delta = \mp \pi/2 \Rightarrow y^2A^2 + B^2x^2 = B^2A^2 \Rightarrow \frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1$

معادله بیضی

$$\xrightarrow{A=B} x^2 + y^2 = A^2$$

دایره

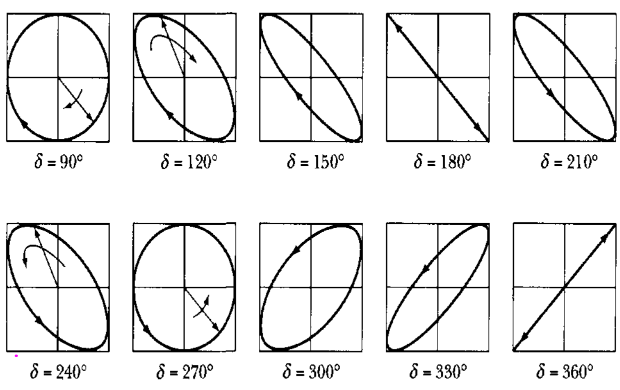
حالت ب) $\delta = 0 \Rightarrow y^2A^2 + x^2B^2 - 2ABxy = 0 \Rightarrow (Ay - xB)^2 = 0$

$$\Rightarrow Ay - Bx = 0 \Rightarrow y = B/A\,x$$: خط راست

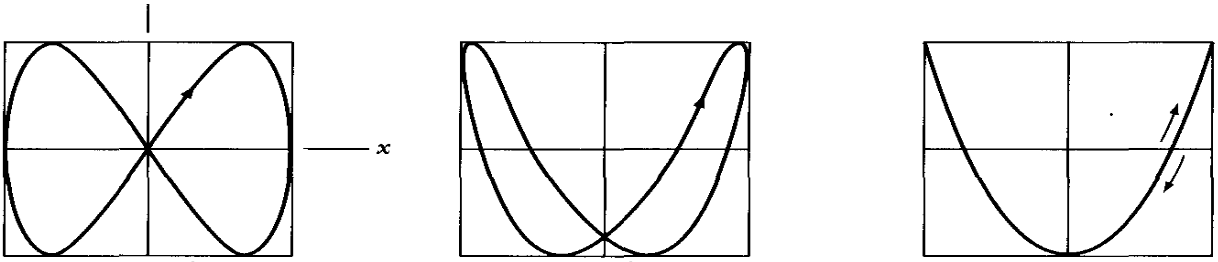
حالت ج) $\delta = \mp\pi \Rightarrow y^2A^2 + x^2B^2 + 2ABxy = 0 \Rightarrow y = -B/A\,x$ خط راست

در حالتی که $\omega_x = \omega_y$ است، مسیر حرکت

یک بیضی است که در حالت‌های خاص می‌تواند دایره و یا خط باشد.



اگر $\omega_y \neq \omega_x$ باشد و نسبت آنها گویا باشد ← منحنی‌های لیساژو مسیر حرکت ذره می‌باشند.



$\omega_y = 2\omega_x ; \delta = 0$ $\omega_y = 2\omega_x ; \delta = \pi/3$ $\omega_y = 2\omega_x ; \delta = \pi/2$

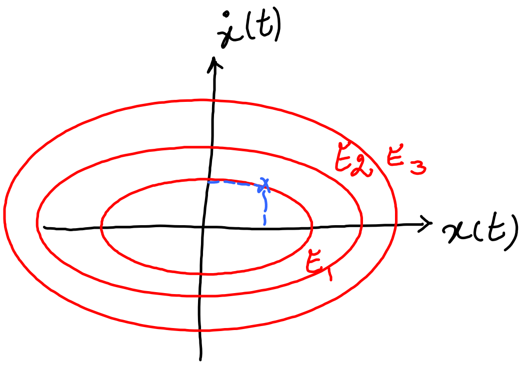
اگر $\omega_y \neq \omega_x$ باشد و نسبت آنها گویا نباشد، مسیر حرکت بسته نمی‌باشد. ذره از یک نقطه با یک سرعت عبور نمی‌کند.

فضای فاز (phase space)

سرعت و مختصه مکانی ذره (ممنتم و مکان ذره) فضای فاز را تشکیل می‌دهند.

برای یک ذره با n درجه آزادی، فضای فاز $2n$ بعدی است.

هر مسیر بر روی فضای فاز نشان دهنده شرایط اولیه معینی برای حرکت



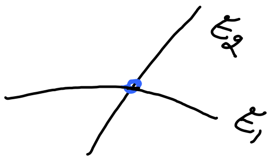
$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = \text{ثابت}$$

$$\Longrightarrow \frac{\dot{x}^2}{\frac{2E}{m}} + \frac{x^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} = 1$$

$\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$, $\sqrt{\frac{2E}{m}}$ یک بیضی به مرکز (0,0) و قطرهای ←

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

انرژی‌های مختلف، نشان دهنده شرایط اولیه مختلف هستند.



از قانون دوم نیوتن می‌توان نمودارهای فاز را بدست آورد:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \Longrightarrow \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = -\omega_0^2 x \longrightarrow \dot{x}\,d\dot{x} = -\omega_0^2 x\,dx$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt}\dot{x} = \frac{d}{dx}\dot{x}\,\frac{dx}{dt} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}$$