جلسه پنجم : حل تمرین از فصل ۲

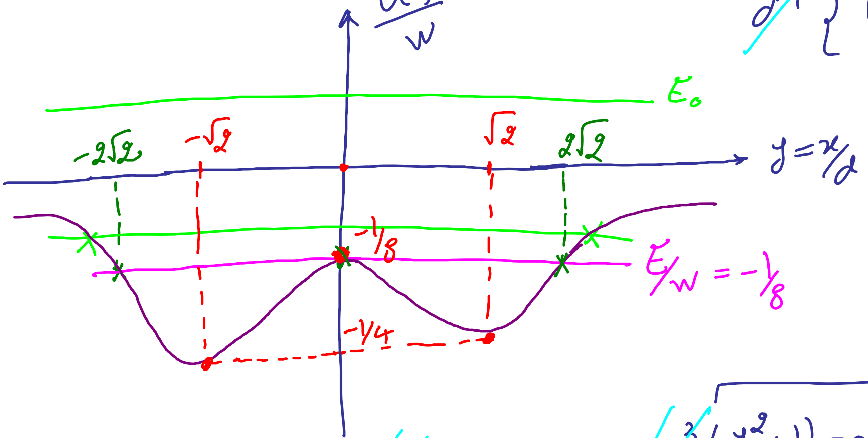
۱: پتانسیل یک بعدی روبرو را داریم : (d و w ثابت هستند)

$$U(x) = \frac{-wd^2(x^2+d^2)}{x^4+8d^4}$$

الف- منحنی تغییرات این پتانسیل را رسم و در مورد حرکت در نقاط مختلف بحث کنید.
آیا حرکت مقید است یا نامقید؟ شرط تعادل کجاست.

ب- نقاط برگشت را به ازای $E=\frac{-w}{8}$ محاسبه کنید که E یک مقدار ثابت است.

تغییر متغیر : $y = x/d \longrightarrow \frac{U(x)}{w} = \frac{-\cancel{d^2} \times \cancel{d^2}\{(x/d)^2+1\}}{\cancel{d^4}\{(x/d)^4+8\}} = \frac{-(y^2+1)}{y^4+8} < 0$



$$\frac{U(x)}{w} \underset{y\to\infty}{\simeq} \frac{-y^2}{y^4} = -1/y^2 \xrightarrow[y\to\infty]{} 0$$

از U مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dU}{dy} = 0 \Longrightarrow -\cancel{2y}(y^4+8) + \cancel{4y^3}_{2y^2}(y^2+1) = 0 \longrightarrow \boxed{y=0} \quad : \text{ماکزیمم}$$

$$\Longrightarrow -y^4-8+2y^4+2y^2=0$$

$$\Longrightarrow y^4+2y^2-8=0$$

$$\Longrightarrow (y^2-2)\underbrace{(y^2+4)}_{\neq 0}=0 \Longrightarrow y^2=2 \Longrightarrow \boxed{y=\mp\sqrt2} \quad : \text{مینیمم}$$

مقدار U/w را در $y=\mp\sqrt2$ و $y=0$ حساب می‌کنیم،

$$U/w = \frac{-(y^2+1)}{y^4+8} \xrightarrow{y=0} U/w = -1/8$$

$$\xrightarrow[y=\mp\sqrt2]{} U/w = -\frac{2+1}{4+8} = -\frac{3}{12} = -1/4$$

$x=0$: نقطه تعادل ناپایدار — اگر $E>0$: حرکت نامقید

$x=\mp\sqrt2 d$: نقاط تعادل پایدار — اگر $E<0$: حرکت مقید

ب- برای $E=-w/8$ ، سه نقطه برگشت وجود دارد : $E=U$

$$\cancel{+W}/8 = \frac{\cancel{+W}(y^2+1)}{y^4+8} \Rightarrow 8y^2+\cancel{8} = y^4+\cancel{8} \xrightarrow{y=0} y^2=8 \Rightarrow y=\mp 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x = \mp 2\sqrt{2}\, d$$

$$x=0$$

۲ : نیروی $\vec{F}$ بصورت مقابل مفروض است :

$$\vec{F} = (2xy+z^3)\hat{i} + x^2\hat{j} + 3xz^2\hat{k}$$

الف - نشان دهید این نیرو پایستار است .

ب - پتانسیل اسکالر را بیابید .

ج - اگر جسم تحت تاثیر این نیرو قرار گیرد ، کار انجام شده از نقطه $(1,-2,1)$ به نقطه $(3,1,4)$ حقدر است ؟

الف -

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy+z^3 & x^2 & 3xz^2 \end{vmatrix} = \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(3xz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2)\right\} + \hat{j}\left\{\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(3xz^2)}_{3z^2} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}(2xy+z^3)}_{3z^2}\right\} + \hat{k}\left\{\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x^2)}_{2x} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(2xy+z^3)}_{2x}\right\} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=0 \longrightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla}U \;?$$

$$\Rightarrow F_x = -\frac{\partial}{\partial x}U = 2xy+z^3 \longrightarrow U = -\int 2xy\,dx - \int z^3 dx + \cdots = -x^2y - z^3x + \underbrace{f_1(y,z)}_{=C}$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 \longrightarrow U = -\int x^2 dy + f_2(x,z) = -x^2y + \underbrace{f_2(x,z)}_{-xz^3+C}$$

$$F_z = \frac{-\partial U}{\partial z} = 3xz^2 \longrightarrow U = -\int 3xz^2 dz + f_3(x,y) = -xz^3 + \underbrace{f_3(x,y)}_{-x^2y+C}$$

$$\longrightarrow \boxed{U = -x^2y - xz^3 + C}$$

ج -

$$W = -\Delta U = U_1 - U_2$$

نقطه ۱ : $(1,-2,1) \rightarrow U_1 = 2-1+C = 1+C$

نقطه ۲ : $(3,1,4) \rightarrow U_2 = -9\times 1 - 3\times 64 + C = -201+C$

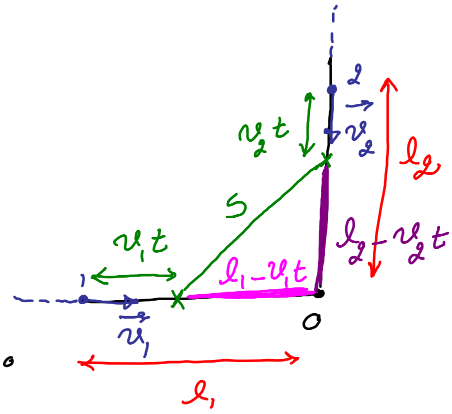
$$\Rightarrow W = 1-(-201) = 202$$

$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int (2xy+z^3)\,dx + \int x^2 dy + \int 3xz^2 dz$$

$$= x^2y + z^3x \Big|_{1\ \text{نقطه}}^{2\ \text{نقطه}} + x^2y \Big|_1^2 + xz^3 \Big|_1^2 = \big(9\times1 + 64\times3 - 1\times(-2) - 1\times1\big)$$

$$+ \big(9\times1 - 1\times(-2)\big) + \big(3\times64 - 1\times1\big) = \cdots$$

۳:



$$S^2 = (l_1 - v_1 t)^2 + (l_2 - v_2 t)^2$$

$$\Rightarrow \text{مشتق} = -\cancel{2}v_1(l_1 - v_1 t) - \cancel{2}v_2(l_2 - v_2 t) = 0$$

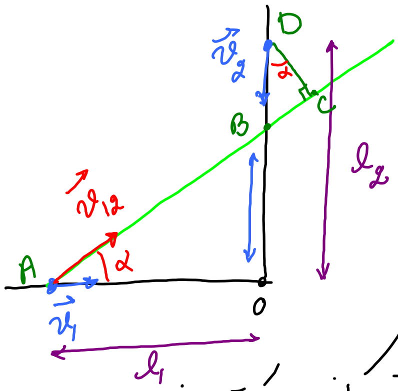
$$\Rightarrow v_1 l_1 - v_1^2 t + v_2 l_2 - v_2^2 t = 0 \Rightarrow t(v_1^2 + v_2^2) = l_1 v_1 + l_2 v_2$$

$$\Rightarrow t = \frac{l_1 v_1 + l_2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}$$

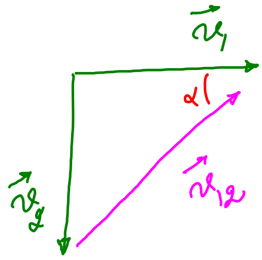
برای یافتن فاصله کمینه این t را در S جایگذاری کرده و S_{min} را حساب می‌کنیم.

روش دوم برای یافتن S کمینه:

ذره دوم را ثابت در نظر می‌گیریم. پس ذره ۱ نسبت به ۲ حرکت می‌کند:



$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$



$$\tan\alpha = \frac{v_2}{v_1}$$

ذره ۱ روی مسیر سبز (از دید ذره ۲) حرکت می‌کند پس کمترین فاصله بین دو ذره خط عمود DC است.

$\overset{D}{OAB}$ در : $OA\tan\alpha$

$$DC = BD\cos\alpha = (OD - OB)\cos\alpha = (l_2 - l_1\tan\alpha)\cos\alpha =$$

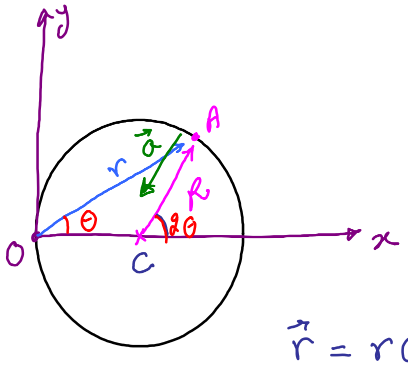
$$\tan\alpha = \frac{v_2}{v_1} \rightarrow \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \beta \Rightarrow \beta^2\cos^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \Rightarrow (\beta^2 + 1)\cos^2\alpha = 1$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} \Rightarrow DC = \left(l_2 - l_1 \times \frac{v_2}{v_1}\right) \times \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

$$\Rightarrow DC = \frac{1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}(l_2 v_1 - l_1 v_2)$$

۴ : بردار مکان ذره A نسبت به نقطه O با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد.

اندازه سرعت ذره، جهت و اندازه شتاب؟



$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{r} = \underset{\text{متغیر}}{r}\cos\theta\,\hat{i} + r\sin\theta\,\hat{j}$$

$\triangle OAC$: $\dfrac{R}{\cancel{\sin\theta}} = \dfrac{r}{\underbrace{\sin(\pi - 2\theta)}}$

$\sin 2\theta = 2\cancel{\sin\theta}\cos\theta$

$$\Longrightarrow r = 2R\cos\theta$$

$$\Longrightarrow \vec{r} = 2R\cos^2\theta\,\hat{i} + R\sin 2\theta\,\hat{j}$$

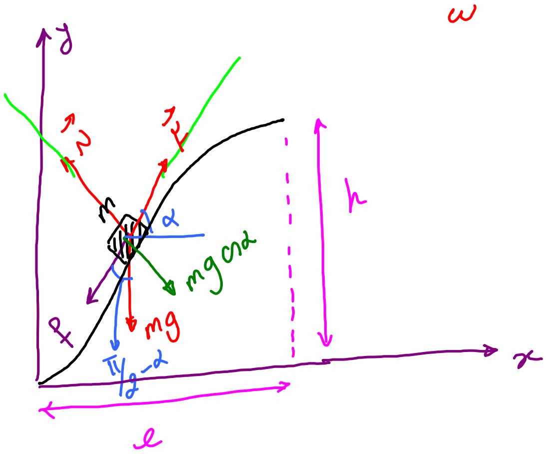
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\underbrace{4R\cos\theta\sin\theta}_{2R\sin 2\theta}\frac{d\theta}{dt}\,\hat{i} + 2R\cos 2\theta\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{j} = +2R\omega\left(-\sin 2\theta\,\hat{i} + \cos 2\theta\,\hat{j}\right)$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$\Longrightarrow |\vec{v}| = 2R\omega\sqrt{\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta} = 2R\omega$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2R\omega\left(-2\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega}\cos 2\theta\,\hat{i} - 2\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega}\sin 2\theta\,\hat{j}\right) = -4R\omega^2\left(\cos 2\theta\,\hat{i} + \sin 2\theta\,\hat{j}\right)$$

$$\Longrightarrow |\vec{a}| = 4R\omega^2$$



۵: سؤال ۶ تمرین ها

حرکت با سرعت ثابت است.

$$\sum \vec{F} = 0$$

نیروها را در جهت F تجزیه می‌کنیم:

$$F = f + mg\overbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}^{\sin\alpha}$$

μN $mg\cos\alpha$

$$\Longrightarrow F = \mu mg\cos\alpha + mg\sin\alpha \longrightarrow W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int F\,dr$$

$d\vec{r}$, α

$d\vec{r}$ ، $\vec{F}$ هم‌جهت هستند.

$$\Longrightarrow W = \int \mu mg\underbrace{\cos\alpha\,dr}_{dx} + \int mg\underbrace{\sin\alpha\,dr}_{dy} = \mu mg\int_0^l dx + mg\int_0^h dy = mg(\mu l + h)$$