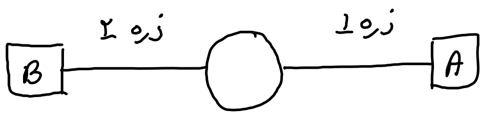
همبستگی اسپینی

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \vec{S}_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \vec{S}_2$$

$$\tfrac{1}{2} \otimes \tfrac{1}{2} = 1 \oplus 0 \longrightarrow |s=0, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right) \longrightarrow \text{اسپین‌ها همبسته هستند}$$

اندازه‌گیری روی اسپین ذره اول $\leftarrow$ با احتمال $\frac{1}{2}$، up داریم $\leftarrow$ با احتمال 1 ، برای ذره دوم اسپین پایین داریم.

$$\underset{J=0}{\text{مزون } \eta} \longrightarrow \underset{J=1/2}{\mu^+ + \mu^-}$$



فرض کنید هر دو گرها اسپین‌ها را در جهت x را اندازه بگیرند:

$$|\text{spin singlet}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\hat{x},+;\hat{x},-\rangle - |\hat{x},-;\hat{x},+\rangle\right)$$

A می‌تواند S_x و S_z را اندازه بگیرد.

B فقط می‌تواند S_x را اندازه بگیرد.

مولفه اسپین A	نتایج A	مولفه اسپین B	نتایج B
z	$+$	x	$+$
z	$+$	x	$-$
x	$+$	x	$-$
x	$-$	x	$+$

دو ردیف اول $\longrightarrow$ ارتباط دو اسپین کاملاً تصادفی است.

دو ردیف آخر $\longrightarrow$ همبستگی اسپینی ۱۰۰٪

اصل موضعی اینشتین و نامساوی بل

تعداد زیادی ذره با اسپین $\frac{1}{2}$ داریم. فرض کنید به طور مثال داریم:

$|\hat{z}+, \hat{x}-\rangle$ اگر S_z اندازه‌گیری شود، علامت $+$ با قطعیت بدست آمده است.

" S_x " " " " $-$ " " " " .

ذره اول	ذره دوم
$(\hat{z}+, \hat{x}-)$	$(\hat{z}-, \hat{x}+)$
$(\hat{z}+, \hat{x}+)$	$(\hat{z}-, \hat{x}-)$
$(\hat{z}-, \hat{x}+)$	$(\hat{z}+, \hat{x}-)$
$(\hat{z}-, \hat{x}-)$	$(\hat{z}+, \hat{x}+)$

آزمایش را پیچیده‌تر می‌کنیم. دو ذره داریم که اسپین آنها در سه امتداد مختلف در نظر گرفته می‌شود. $\hat{a}$ و $\hat{b}$ و $\hat{c}$

ذره اول	ذره دوم	population
$(\hat{a}_+, \hat{b}_+, \hat{c}_+)$	$(\hat{a}_-, \hat{b}_-, \hat{c}_-)$	N_1
$(\hat{a}_+, \hat{b}_+, \hat{c}_-)$	$(\hat{a}_-, \hat{b}_-, \hat{c}_+)$	N_2
$(\hat{a}_+, \hat{b}_-, \hat{c}_+)$	$(\hat{a}_-, \hat{b}_+, \hat{c}_-)$	N_3
$(\hat{a}_+, \hat{b}_-, \hat{c}_-)$	$(\hat{a}_-, \hat{b}_+, \hat{c}_+)$	N_4

احتمال این که مؤلفه $\hat{a}$ از ذره اول $(+)$ و مؤلفه $\hat{b}$ از ذره دوم $(+)$ باشد:

$$P(\hat{a}_+, \hat{b}_+) = \frac{N_3 + N_4}{N}, \quad N \longrightarrow \sum_{i=1}^{8} N_i$$

$$P(\hat{c}_+, \hat{b}_+) = \frac{N_3 + N_7}{N} \quad \Longrightarrow \quad \frac{N_3 + N_4}{N} \leqslant \frac{N_3 + N_7 + N_2 + N_4}{N}$$

$$P(\hat{a}_+, \hat{c}_+) = \frac{N_2 + N_4}{N} \quad \Longrightarrow \quad P(\hat{a}_+, \hat{b}_+) \leqslant P(\hat{a}_+, \hat{c}_+) + P(\hat{c}_+, \hat{b}_+)$$

آزمایش

حالت تکتایی در امتداد $\hat{a}$:

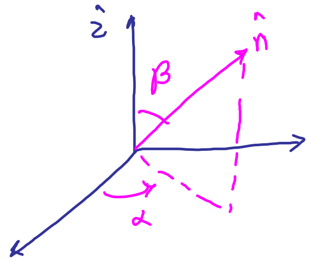
$$|\text{spin singlet}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|\hat{a}+, \hat{a}-\rangle - |\hat{a}-, \hat{a}+\rangle\right\}$$

روی ذره 1 در جهت $\hat{a}$ اندازه‌گیری انجام داده‌ایم و مشاهده کردیم که اسپین $\hat{a}$ آن $+$ است. پس ذره دوم اسپین جهت $\hat{a}$ منفی دارد.

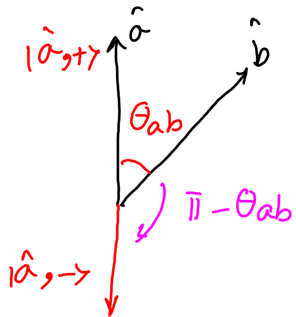
روی ذره 2، اسپین جهت $\hat{b}$ را اندازه می‌گیریم. احتمال این که ذره 2 در حالت $|\hat{b}, +\rangle$ باشد، چقدر است؟

$$|\hat{a}, -\rangle = \alpha|\hat{b}, +\rangle + \beta|\hat{b}, -\rangle \longrightarrow$$ احتمال این که ذره 2 در حالت $|\hat{b}_+\rangle$ باشد: $|\alpha|^2$

داریم : $$|\hat{n}, +\rangle = \cos\frac{\beta}{2}\, e^{-i\alpha/2}|+\rangle + \sin\frac{\beta}{2}\, e^{i\alpha/2}|-\rangle$$



احتمال این که ذره در حالت $|+\rangle$ باشد $= \cos^2\frac{\beta}{2}$



احتمال این که ذره 2 در حالت $|\hat{b}, +\rangle$ باشد $= \sin^2\frac{\theta_{ab}}{2} = \cos^2\left(\frac{\pi - \theta_{ab}}{2}\right)$

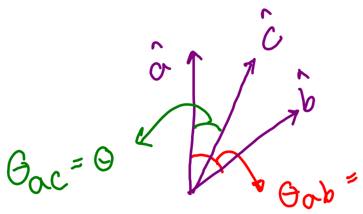
$$P(\hat{a}_+, \hat{b}_+) = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta_{ab}}{2}$$

$$P(\hat{a}_+, \hat{c}_+) = \tfrac{1}{2}\sin^2\frac{\theta_{ac}}{2}$$

$$P(\hat{c}_+, \hat{b}_+) = \tfrac{1}{2}\sin^2\frac{\theta_{bc}}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{نامساوی بل}} \quad \sin^2\frac{\theta_{ab}}{2} \leq \sin^2\frac{\theta_{ac}}{2} + \sin^2\frac{\theta_{bc}}{2}$$

مثال نقض :



$$\Downarrow$$

$$\sin^2\theta \leq 2\sin^2\theta/2$$

اگر $\theta = \pi/4 \longrightarrow \tfrac{1}{2} \leq 0/29$ ✗

فصل چهارم : تقارن‌ها در مکانیک کوانتومی

مکانیک کلاسیک

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) \longrightarrow$ معادلات لاگرانژ : $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0$ *

$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \longrightarrow$ هامیلتون " : $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$, $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$ *''

$\mathcal{H} = p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$, $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ *' : تکانه تعمیم یافته

فرض کنید : $q_i \to q_i + \delta q_i \implies \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$: سیستم دارای تقارن انتقالی است

$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = 0$ یا $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \xrightarrow{*} \frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}}_{*' : p_i} = 0 \implies$ $p_i =$ ثابت

قانون پایستگی ممنتم

$\downarrow$ *''

$\dot{p}_i = 0 \implies p_i =$ ثابت

نتیجه : اصل بقا $\longleftrightarrow$ تقارن $\longleftrightarrow$ تبهگنی

تقارن در کوانتوم

درمورد تبدیلات تقارنی داشتیم : ۱) درحد تبدیلات کوچک داریم : $\mathcal{T} = 1$

$\mathcal{T}$

۲) عملگر تبدیلات باید یکانی باشند : $\mathcal{T}\mathcal{T}^\dagger = 1$ ← از اصل بقای احتمال نتیجه می‌شود.

۳) $\mathcal{T}(\epsilon) = 1 - i\epsilon G/\hbar$ → مولد تبدیل

مثال : * انتقال : $\epsilon = dx'$, $G = P_x , P_y , P_z$

* دوران : $\epsilon = d\theta$, $G = J_x , J_y , J_z$

سؤال: اگر تحت یک تبدیل، سیستم دارای تقارن باشد، چه چیزی ثابت می‌ماند؟

- مثال در مورد دوران :

$\mathcal{J} \to D(R)$, $G = \vec{J}\cdot\hat{n}$:
$$\begin{cases} |\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha'\rangle \\ A'^{(H)} = \mathcal{J}^{\dagger} A^{(S)} \mathcal{J} \quad : \text{یک اپراتور دلخواه} \end{cases}$$

تصویر هایزنبرگ :

اپراتور

هامیلتونی

$$H' = \mathcal{J}^{\dagger} H \mathcal{J} \xrightarrow{\text{تقارن}} H' = H$$

طرفین را در $\mathcal{J}$ ضرب می‌کنیم

$$\mathcal{J}H = \underbrace{\mathcal{J}\mathcal{J}^{\dagger}}_{1} H \mathcal{J} \Rightarrow \mathcal{J}H = H\mathcal{J}$$

$$\Rightarrow [\underbrace{\mathcal{J}}_{1 - iG\cdot d\vec{\epsilon}/\hbar}, H] = 0$$

$$\Rightarrow [G, H] = 0$$

مولد تبدیل که در حالت دوران اندازه حرکت زاویه‌ای است.

نتیجه: اگر یک سیستم تحت یک تبدیل تقارنی ناوردا باشد، جابجاگر هامیلتونی و مولد آن تبدیل صفر است.

معادله حرکت هایزنبرگ : $\dfrac{dG^H}{dt} = \dfrac{1}{i\hbar}[G^H, H]$ (1) , $G^H = U^{\dagger} G U$ ⟵ اپراتور تحول زمانی

$U = e^{-iHt/\hbar}$

اگر $[G, H] = 0 \Rightarrow [G, \underbrace{e^{-iHt/\hbar}}_{U}] = 0 \Rightarrow GU = UG \xrightarrow{U^{\dagger}} U^{\dagger} G U = \underbrace{U^{\dagger} U}_{1} G$

$$\Rightarrow G^H = G$$

(1) $$\Rightarrow \frac{dG}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\underbrace{\cancel{[G, H]}}_{0} \Rightarrow dG/dt = 0$$

ویژه‌کت G در زمان t_0 : $|g, t_0\rangle \longrightarrow \boxed{G|g, t_0\rangle} = \boxed{g|g, t_0\rangle}$

حالت سیستم در زمان t : $|g, t_0; t\rangle = U|g, t_0\rangle$

↓ اثر G

[redacted] $$\boxed{G|g, t_0; t\rangle} = \underbrace{GU}_{UG}\underbrace{|g, t_0\rangle}_{g|g, t_0\rangle} = g\,U|g, t_0\rangle = \boxed{g|g, t_0; t\rangle}$$

نتیجه: اگر سیستم در زمان t_0، دارای ویژه مقدار g باشد و اگر مولد تبدیلات تقارنی G، ثابت حرکت باشد، در زمان‌های بعد نیز ویژه مقادیر G، همان g های باشند.

ارتباط تبهگنی با تقارن

فرض کنیم: $H|n\rangle = E_n|n\rangle$

سیستم تحت تبدیل $\mathcal{J}$ تقارن دارد.

$$|n\rangle \xrightarrow{\mathcal{J}} \mathcal{J}|n\rangle$$

حالتهای متفاوت دارای یک انرژی هستند

$$\boxed{H(\mathcal{J}|n\rangle)} = \mathcal{J}H|n\rangle = \mathcal{J}E_n|n\rangle = \boxed{E_n(\mathcal{J}|n\rangle)}$$

پس حالتهای $|n\rangle$ و $\mathcal{J}|n\rangle$ تبهگن می‌باشند.

تبهگنی $\longleftrightarrow$ تقارن

مثال: دوران را در نظر بگیریم.

$$\mathcal{J} = D(R) \xrightarrow{\text{تقارن دورانی}} [J_i, H] = 0 \Rightarrow [H, J^2] = 0$$

مثلاً: $H = \frac{p^2}{2m} + V_1(r) + \vec{L}\cdot\vec{S}$

ویژه کت مشترک H و J^2 و J_z : $|n,j,m\rangle$

از قبل داشتیم: $[J^2, J_z] = 0$

$$H|njm\rangle = E_n|njm\rangle$$

$$J^2|njm\rangle = \hbar^2 j(j+1)|njm\rangle$$

$$J_z|njm\rangle = m\hbar|njm\rangle$$

$$[H, J_i] = 0 \Longrightarrow [H, J_\pm] = 0$$

$$J_+|njm\rangle = C_+|n,j,m+1\rangle \longrightarrow \underbrace{HJ_+|njm\rangle}_{J_+\underbrace{H|njm\rangle}_{E_{n,m}|njm\rangle}} = C_+\underbrace{H|n,j,m+1\rangle}_{E_{n,m+1}|n,j,m+1\rangle}$$

$$\Longrightarrow E_{n,m}(\underbrace{J_+|n,j,m\rangle}_{\cancel{C_+|n,j,m+1\rangle}}) = \cancel{C_+}E_{n,m+1}\cancel{|n,j,m+1\rangle} \Longrightarrow \boxed{E_{n,m} = E_{n,m+1}}$$

انرژی mهای مختلف با هم مساوی است.

چون $-j \le m \le j$ ، پس تبهگنی این سیستم $2j+1$ گانه است.