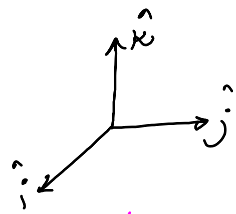
جلسه چهارم — حرکت ذره در میدان E.M — قوانین بقا ← تکانه خطی، ← زاویه‌ای، ← انرژی — پتانسیل و نقاط تعادل ← پایدار، ← ناپایدار، ← بی تفاوت

مثال: ذره‌ای به جرم m با بار الکتریکی q در میدان مغناطیسی ثابت حرکت می‌کند. معادله مسیر ذره را بیابید.



$$\vec{B}=B\hat{k} \qquad \vec{F}=m\vec{a} \;;\; \vec{F}=q(\cancel{\vec{E}}+\vec{v}\times\vec{B})$$

$$\vec{v}=\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}+\dot{z}\hat{k}$$

$$\vec{F}=q(\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}+\dot{z}\hat{k})\times(B\hat{k})=q(\dot{x}\underbrace{\hat{i}\times\hat{k}}_{-\hat{j}}+\dot{y}\underbrace{\hat{j}\times\hat{k}}_{+\hat{i}}+\dot{z}\cancel{\hat{k}\times\hat{k}})B$$

$$\Longrightarrow \vec{F}=qB(-\dot{x}\hat{j}+\dot{y}\hat{i})=m(\ddot{x}\hat{i}+\ddot{y}\hat{j}+\ddot{z}\hat{k})$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -qB\dot{x}=m\ddot{y} \longrightarrow \ddot{y}=-\dfrac{qB}{m}\dot{x} \;;\; qB/m=\alpha \\ qB\dot{y}=m\ddot{x} \longrightarrow \ddot{x}=\alpha\dot{y} \\ 0=m\ddot{z} \Longrightarrow \ddot{z}=0 \Longrightarrow \dot{z}=\text{ثابت}=v_{0z} \Longrightarrow z=v_{0z}t+z_0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \ddot{y}=-\alpha\dot{x} \xrightarrow{\text{مشتق}} \dddot{y}=-\alpha\ddot{x} \Longrightarrow \dddot{y}=-\alpha^2\dot{y} \longrightarrow \ddot{y}=-\alpha^2 y \\ \ddot{x}=\alpha\dot{y} \quad (1) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow y=A\cos\alpha t+B\sin\alpha t+y_0$$

به همین ترتیب: $x=A'\cos\alpha t+B'\sin\alpha t+x_0$

$$\dot{y}=-A\alpha\sin\alpha t+B\alpha\cos\alpha t \quad (2)$$

$$\dot{x}=-A'\alpha\sin\alpha t+B'\alpha\cos\alpha t \quad (3) \longrightarrow \ddot{x}=-A'\alpha^2\cos\alpha t-B'\alpha^2\sin\alpha t$$

$$(1):\; -A'\alpha^2\cos\alpha t-B'\alpha^2\sin\alpha t=-A\alpha^2\sin\alpha t+B\alpha^2\cos\alpha t$$

$$a_1x+a_2x^2=0 \Longrightarrow a_1=a_2=0$$

$$a_1x+a_2y=0 \;,\; y=2x \Longrightarrow a_1x+a_2\times 2x=0 \Longrightarrow a_1=-2a_2$$

اگر توابع f_1، f_2، ...، f_n توابع مستقل خطی باشند و داشته باشیم:

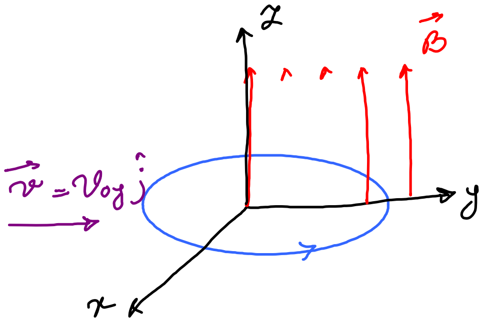
$$a_1f_1+a_2f_2+\cdots+a_nf_n=0 \Longrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n=0$$

در مسأله: $A'=-B$ ، $B'=A$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x-x_0=-B\cos\alpha t+A\sin\alpha t \\ y-y_0=A\cos\alpha t+B\sin\alpha t \\ z-z_0=v_{0z}t \end{cases}$$

شرط اولیه: $t=0 : \vec{v} = v_{0y}\hat{j}$

$z = z_0 \Leftarrow v_{0z} = 0$



(۲): $t=0 : v_{0y} = B\alpha \Rightarrow B = \frac{v_{0y}}{\alpha}$

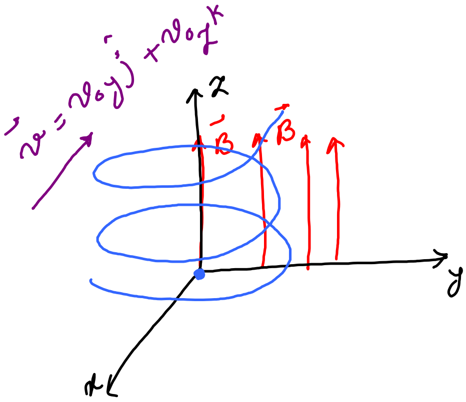
(۳): $t=0 : v_{0x} = 0 = A\alpha \Rightarrow A = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = \dfrac{-v_{0y}}{\alpha}\cos\alpha t \\ y - y_0 = \dfrac{v_{0y}}{\alpha}\sin\alpha t \\ z - z_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \frac{v_{0y}^2}{\alpha^2}\cos^2\alpha t + \frac{v_{0y}^2}{\alpha^2}\sin^2\alpha t$$

$$\Rightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \frac{v_{0y}^2}{\alpha^2} = \frac{v_{0y}^2 m^2}{q^2 B^2}$$

معادله یک دایره است به مرکز x_0 و y_0 و به شعاع $\frac{v_{0y}}{\alpha}$ که شعاع با جرم نسبت مستقیم و با q و B نسبت عکس دارد.

شرط اولیه: $\vec{v} = v_{0y}\hat{j} + v_{0z}\hat{k}$



تنها تفاوت در معادله جهت z است: $z - z_0 = v_{0z}t$

ذره در صفحه x و y می‌چرخد و هم بر روی محور z بالا می‌رود ← حرکت مارپیچی

تمرین ۳: فرض کنید ذره در لحظه اول دارای سرعت اولیه‌ای در جهت x هم باشد، مسیر ذره چه تغییری می‌کند؟

$$\begin{cases} x - x_0 = -\overset{v_{0y}/\alpha}{\cancel{B}}\cos\alpha t + \overset{v_{0x}/\alpha}{\cancel{A}}\sin\alpha t \\ y - y_0 = \underset{v_{0x}/\alpha}{A}\cos\alpha t + \underset{v_{0y}/\alpha}{B}\sin\alpha t \\ z - z_0 = v_{0z}t \end{cases}$$

(۳): $t=0 : v_{0x} = A\alpha \Rightarrow A = \frac{v_{0x}}{\alpha}$

(۲): $t=0 : v_{0y} = B\alpha \Rightarrow B = \frac{v_{0y}}{\alpha}$

$$\Rightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \frac{v_{0y}^2 + v_{0x}^2}{\alpha^2}$$

← تنها تغییر این است که شعاع دایره یا مارپیچ به صورت $\sqrt{\frac{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}{\alpha^2}}$ تغییر می‌کند.

قوانین بقا یا پایستگی

۱) بقای تکانه خطی: اگر برآیند نیروهای خارجی وارد بر یک ذره صفر باشد، تکانه خطی ذره پایسته است.

$\hat{s}$: یک جهت دلخواه ثابت نسبت به زمان

فرض کنیم نیروی جهت $\hat{s}$ صفر باشد $\longrightarrow$ $\vec{F}\cdot\hat{s}=0$

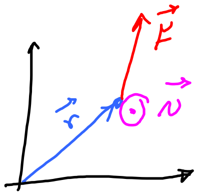
قانون دوم : $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\dot{\vec{p}} \Longrightarrow \dot{\vec{p}}\cdot\hat{s}=0 \Longrightarrow \vec{p}\cdot\hat{s}=$ ثابت $\longrightarrow$ تکانه در جهت $\hat{s}$ ثابت است

اگر نیرو در یک جهت وجود نداشته باشد، تکانه خطی آن جهت پایسته است.

۲) بقای تکانه زاویه‌ای : اگر گشتاور ~~نیروهای~~ برآیند نیروهای خارجی وارد بر یک ذره صفر باشد، تکانه زاویه‌ای ذره پایسته است.

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt} \longleftrightarrow \vec{N}=\frac{d\vec{L}}{dt} \quad ; \quad \vec{N}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$\underbrace{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}}$$



اگر $\sum\vec{N}=0$

$$\dot{\vec{L}}=0 \Longrightarrow \vec{L}=\text{ثابت} \qquad \dot{\vec{L}}=\cancel{\dot{\vec{r}}\times\vec{p}}+\vec{r}\times\dot{\vec{p}}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{N} \quad \checkmark$$

$$\vec{v}\times m\vec{v}$$

۳) بقای انرژی :

الف - یک ذره از نقطه ۱ به نقطه ۲ تحت نیروی $\vec{F}$ جابجا شود و در این جابجایی سرعت آن از $\vec{v}_1$ به $\vec{v}_2$ تغییر کند.

$$W=\int_1^2\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_1^2 m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}}dt=\int_1^2 m\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}dt}_{d\vec{v}}\cdot\vec{v}$$

$$W=m\int_1^2\vec{v}\cdot d\vec{v}=\frac{1}{2}mv^2\Big|_1^2 \qquad T\equiv\frac{1}{2}mv^2$$

$$\Longrightarrow W=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=T_2-T_1=\Delta T$$

ب - فرض کنید ذره از نقطه ۱ به نقطه ۲ جابجا شود اما سرعت آن تغییر نمی‌کند.

نیروی مورد نظر یک نیروی پایستار است : ۱) کار نیروهای پایستار به مسیر حرکت وابسته نیست.

۲) " " " به نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر وابسته است

۳) اگر $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ $\longleftarrow$ نیروی $\vec{F}$ پایستار است $\Longleftarrow$ $\vec{F}=-\vec{\nabla}U$ $\longleftarrow$ انرژی پتانسیل

قراردادی

یادآوری :

$$\vec{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

گرادیان : $\vec{\nabla}U=\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial U}{\partial x_i}\hat{e}_i \longrightarrow$ بردار

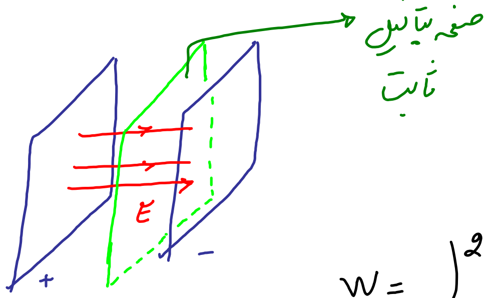
دیورژانس : $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$

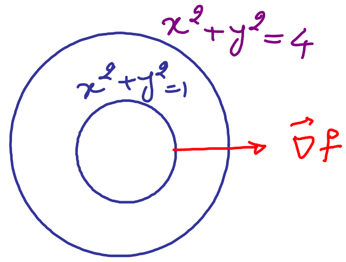
کرل : $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right)\hat{k}$

$\longrightarrow \quad (\vec{\nabla}\times\vec{A})_i = \epsilon_{ijk}\,\partial_j A_k$

$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}U = 0$ ⟵ کرل هر گرادیان صفر است $\Longrightarrow$ اگر $\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0 \Longrightarrow \vec{A} = \vec{\nabla}U$

$f(x,y) = x^2 + y^2 = R^2$





گرادیان یک تابع به صفحات تابع ثابت عمود است و در جهت افزایش تابع است.

برمی‌گردیم به حل مسأله :

$$W = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_1^2 \vec{\nabla}U\cdot d\vec{r} = -\int_1^2 dU$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

$$\Longrightarrow W = -(U_2 - U_1) = -\Delta U$$

حالت الف و ب را ترکیب می‌کنیم :

$\vec{\nabla}(U + \text{ثابت}) = \vec{\nabla}U = -\vec{F}$

مبدأ انرژی پتانسیل را اگر عوض کنیم، مسأله تغییر نمی‌کند

انرژی مکانیکی کل : $E = T + U$

$$\Delta E = \Delta T + \Delta U$$

حال به بحث پایستگی انرژی مکانیکی می‌رسیم :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt}$$

$$\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \tfrac{1}{2}mv^2 = T \Longrightarrow \vec{F}\cdot d\vec{r} = dT \Longrightarrow \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dT}{dt} \Longrightarrow \frac{dT}{dt} = \vec{F}\cdot\dot{\vec{r}}$$

$$U = U(x,y,z,t) = U(x_i,t) \Longrightarrow dU/dt = \frac{\partial U}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}}_{\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}}$$

مولفه i ام بردار گرادیان

$$\Longrightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}(\vec{\nabla}U)_i\,\dot{x}_i = \frac{\partial U}{\partial t} + \underbrace{\vec{\nabla}U}_{-\vec{F}}\cdot\dot{\vec{r}}$$

یادآوری : $\vec{A}\cdot\vec{B} = \sum A_i B_i$

$$\Longrightarrow \frac{dE}{dt} = \cancel{\vec{F}\cdot\dot{\vec{r}}} + \frac{\partial U}{\partial t} - \cancel{\vec{F}\cdot\dot{\vec{r}}} = \frac{\partial U}{\partial t}$$

اگر $\frac{\partial U}{\partial t}=0$ ← U وابستگی صریح زمانی نداشته باشد، انرژی مکانیکی کل پایسته است.

انرژی و معادله حرکت

$$\frac{\partial U}{\partial t}=0 \Longrightarrow dE/dt=0 \Longrightarrow E=\text{ثابت}$$

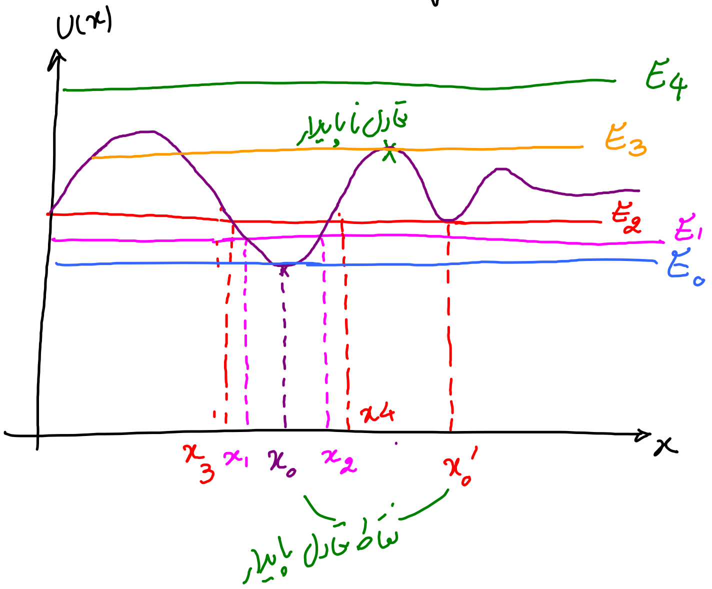
$$E=T+U(x) \Longrightarrow T=\tfrac{1}{2}mv^2=E-U(x)$$

$$\Longrightarrow v=\mp\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U(x)\right)}=dx/dt \Longrightarrow \int_{t_0}^{t}dt=\mp\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{2/m\left(E-U(x)\right)}}$$

$$\Longrightarrow t-t_0=\mp\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{2/m\left(E-U(x)\right)}}$$

با داشتن شکل $U(x)$ می‌توان انتگرال را حل کرد و معادله حرکت را یافت.

پتانسیل و نقاط تعادل



$$E=T+U$$

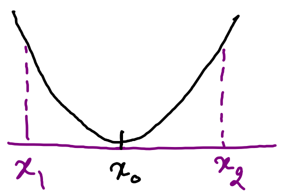
اگر $E=U \Longrightarrow T=0$

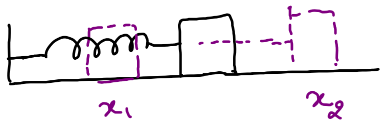
اگر $U>E \Longrightarrow T<0$ ← امکان ندارد

و نواحی ممنوع کلاسیکی داریم.

$E=E_0$: ذره در نقطه x_0 ساکن است.

$E=E_1$: دو نقطه x_1 و x_2 نقاط برگشت هستند: $E=U \Longrightarrow T=0$ یعنی در این نقاط ذره یک لحظه ساکن می‌شود و ذره حرکت مقید بین دو نقطه برگشت x_1 و x_2 دارد.





$E=E_2$: حرکت مقید بین نقاط x_3 و x_4 وجود دارد یا ذره می‌تواند در حالت سکون در نقطه x_0' وجود داشته باشد. ذره نمی‌تواند از ناحیه بین x_3 و x_4 به نقطه x_0' برود چون باید از ناحیه ممنوع کلاسیکی عبور کند که غیرممکن است.

بحث ریاضی تعادل:

یادآوری : $f(x+\epsilon) = f(x) + \epsilon f'(x) + \frac{\epsilon^2}{2!} f''(x) + \cdots$

پتانسیل را حول نقطه تعادل x_0 بسط دهیم :

$$U(x) = U(x_0) + (x-x_0)\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_0} + \frac{1}{2!}(x-x_0)^2 \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0} + \cdots$$

$\epsilon = x - x_0$

0 0

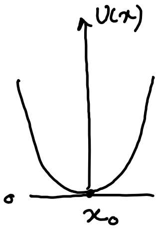
جمله اول: مقدار پتانسیل در نقطه x_0 ⟵ صفر انتخاب می‌کنیم (مبدأ پتانسیل)

جمله دوم: نقطه x_0 نقطه تعادل است پس $F(x_0)=0 \Leftarrow \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_0} = 0$

$$\Longrightarrow U(x) \simeq \frac{1}{2} \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0} \underbrace{(x-x_0)^2}_{>0}$$

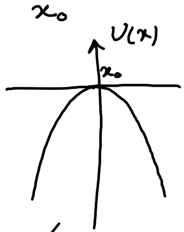
حال از روی علامت مشتق دوم می‌توانیم متوجه شویم که آیا نقطه x_0 نقطه تعادل پایدار است و یا ناپایدار

اگر x_0 نقطه تعادل پایدار باشد داریم :



پس پتانسیل نقاط اطراف x_0، حتماً مثبت است پس $d^2U/dx^2 > 0$

اگر x_0 نقطه تعادل ناپایدار باشد، داریم :



پس پتانسیل نقاط اطراف x_0، حتماً منفی است. پس : $d^2U/dx^2 < 0$

اگر مشتق دوم برابر صفر باشد، باید بقیه جملات پتانسیل را بررسی کنیم (مشتق سوم و بالاتر) درصورتی که تمامی مشتق‌ها برابر صفر باشد، می‌توان گفت، x_0 نقطه تعادل بی‌تفاوت است.