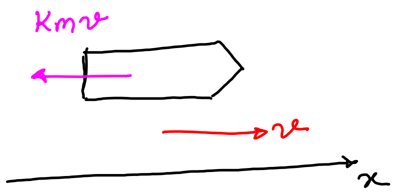
جلسه سوم : حرکت جسم داخل یک سیال با مقاومت ← حرکت افقی جسم

حرکت سقوط آزاد

حرکت پرتابی

مثال ۱ : جسمی به جرم m داخل یک سیال بصورت افقی حرکت می‌کند. اگر نیروی مقاومت سیال متناسب با توان اول سرعت باشد، الف - سرعت و مکان جسم را برحسب زمان بیابید. ب - سرعت جسم را برحسب مکان آن بیابید.



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \longrightarrow -km v = m \ddot{x}$$

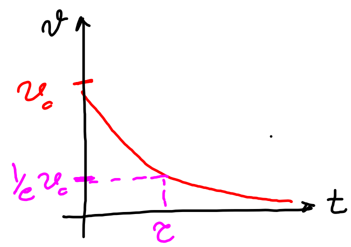
$$\Longrightarrow -kv = \frac{dv}{dt} \Longrightarrow -k\int dt = \int \frac{dv}{v}$$

شرایط اولیه : $v(t=0) = v_0$

$$\Longrightarrow \ln v = -kt + c \xrightarrow{t=0} \ln v_0 = c$$

$$\Longrightarrow \ln v = -kt + \ln v_0 \Longrightarrow \ln v - \ln v_0 = -kt \Longrightarrow \ln v/v_0 = -kt$$

$$\Longrightarrow \exp(\ln v/v_0) = \exp(-kt) \Longrightarrow v/v_0 = e^{-kt} \Longrightarrow v = v_0 e^{-kt}$$



$t=0 \longrightarrow v = v_0$

$t=\infty \longrightarrow v = 0$

زمان مشخصه که معیاری برای تشخیص زمان کوچک و بزرگ است، جایی است که سرعت به $1/e$ مقدار ماکزیمم خودش می‌رسد.

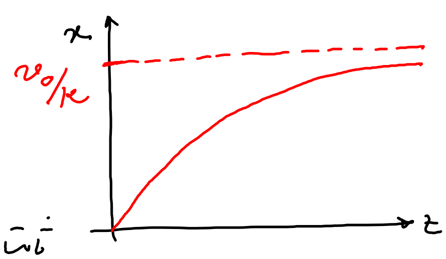
$$v = 1/e\, \cancel{v_0} = \cancel{v_0}\, e^{-k\tau} \Longrightarrow e^{-1} = e^{-k\tau} \Longrightarrow 1 = k\tau \Longrightarrow \tau = 1/k$$

$$v = v_0 e^{-kt} \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt} \Longrightarrow \int dx = \int v_0 e^{-kt} dt \longrightarrow x = v_0 (-1/k) e^{-kt} + c$$

شرایط اولیه : $x(t=0) = 0$

$$\longrightarrow 0 = -v_0/k\, e^0 + c \Longrightarrow c = v_0/k$$

$$\longrightarrow x = v_0/k\,(1 - e^{-kt})$$



$t=0 \longrightarrow x = 0$

$t=\infty \longrightarrow x = v_0/k\,(1-0) = v_0/k =$ ثابت

ب -

$$-k\cancel{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} \;(\cancel{v}) \Longrightarrow -k = \frac{dv}{dx} \Longrightarrow -k\,dx = dv$$

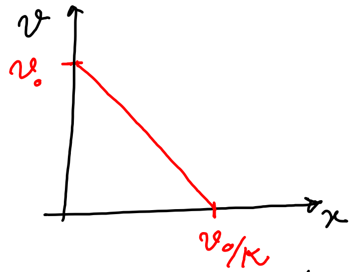
$$\Longrightarrow -kx + c = v$$

شرط اولیه : $t=0 : x=0,\; v=v_0 \Longrightarrow 0 + c = v_0$

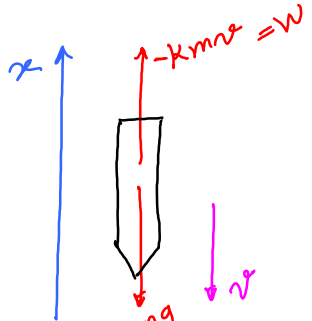
$$\Rightarrow \quad v = -kx + v_0$$

$v = 0 \Rightarrow x = v_0/k$

$x = 0 \Rightarrow v = v_0$



مثال ۲: ذره‌ای به جرم m در میدان گرانشی سقوط می‌کند. اگر مقاومت هوا متناسب با توان اول سرعت باشد، مکان و سرعت جسم را برحسب زمان بیابید.



$v < 0 \Rightarrow kmv < 0$

$W = -kmv > 0$

اگر جهت + را رو به پایین بگیریم، $v > 0$ خواهد بود و $-kmv < 0$ می‌شود که با جهت خلاف حرکت سازگار است.

$$\sum F = m\ddot{x} \Rightarrow -\cancel{m}g - k\cancel{m}v = \cancel{m}\ddot{x}$$

$$\Rightarrow g + kv = -\frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{g/k + v} = -\int_{t_0=0}^{t} k\,dt \Rightarrow \ln\left(v + g/k\right)\Big|_{v_0}^{v} = -k(t - \cancel{t_0})$$

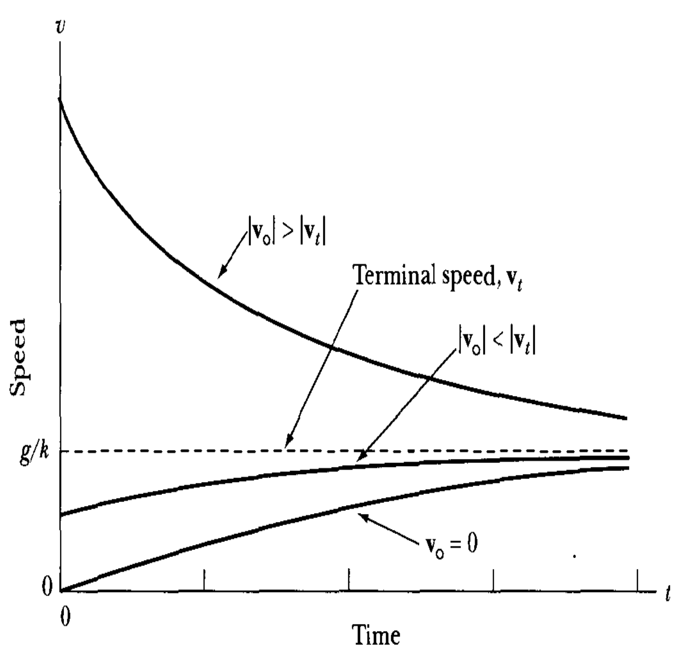
$$\Rightarrow \ln(v + g/k) - \ln(v_0 + g/k) = -kt \Rightarrow \ln\frac{v + g/k}{v_0 + g/k} = -kt$$

$$\Rightarrow \frac{v + g/k}{v_0 + g/k} = e^{-kt} \Rightarrow \boxed{v = (v_0 + g/k)e^{-kt} - g/k}$$

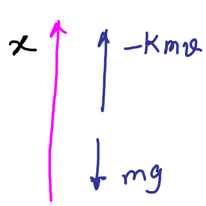
$t \to \infty$

$e^{-kt} = 0 \Rightarrow v_t = -g/k =$ ثابت

سرعت حد: terminal velocity



سرعت ثابت $\equiv$ برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر است



$-mg - kmv = 0$

$\Rightarrow v = -g/k$

$$v = (v_0 + g/k)e^{-kt} - g/k = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = -g/k\int_{t_0}^{t} dt + \int_{t_0}^{t} (v_0 + g/k)e^{-kt}\,dt$$

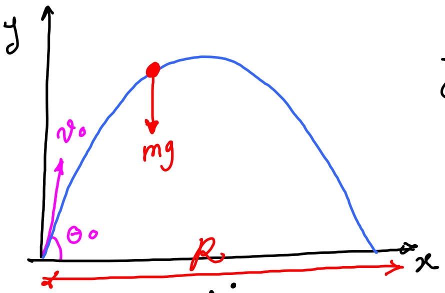
$$\Rightarrow x - \cancel{x_0}^{\,h} = -g/k(t - \cancel{t_0}^{\,0}) + (v_0 + g/k)\,e^{-kt}/(-k)\Big|_{t_0=0}^{t}$$

شرایط اولیه: $t = 0 \rightarrow x_0 = h$

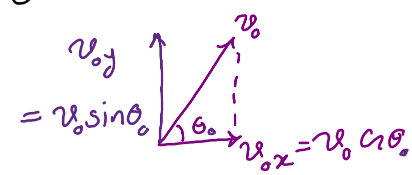
$$\Longrightarrow x = -\frac{g}{k}t - \frac{1}{k}\left(v_0+\frac{g}{k}\right)\left\{e^{-kt} - \underbrace{e^{-kt_0}}_{1}\right\} + h \qquad (t_0=0)$$

$$\longrightarrow \boxed{x = -\frac{g}{k}t + \frac{1}{k}\left(v_0+\frac{g}{k}\right)\left(1-e^{-kt}\right)+h}$$

مثال ۳: ذره‌ای تحت گرانش زمین و با سرعت اولیه v_0 که زاویه θ_0 با محور افقی می‌سازد، حرکت پرتابی انجام می‌دهد.
از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید و روابط x و y برحسب زمان، برد پرتابه و معادله مسیر ذره را بیابید.



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = m\ddot{x} \xrightarrow{F_x=0} \ddot{x}=0 \\ \sum F_y = m\ddot{y} \Rightarrow -mg = m\ddot{y} \Rightarrow \ddot{y}=-g \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d\dot{x}}{dt}=0 \Rightarrow \dot{x} = \text{ثابت} \Rightarrow v_x = \text{ثابت} = v_{0x} \\ \frac{d\dot{y}}{dt} = -g \Rightarrow \dot{y} = -g\int dt \Rightarrow v_y = -gt + \text{ثابت} \Rightarrow v_y = -gt+v_{0y} \end{cases}$$

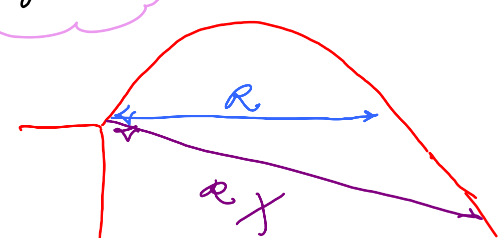
$$\Rightarrow \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = v_{0x} \Rightarrow x = v_{0x}\int dt \Rightarrow x = v_{0x}t + x_0 \\ v_y = \frac{dy}{dt} = -gt+v_{0y} \Rightarrow y = -g\int t\,dt + \int v_{0y}\,dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0$$

$x_0=0$ و $y_0=0$

برای یافتن برد، $y=0$ قرار می‌دهیم:

$$y=0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t \Rightarrow t=0 \quad , \quad -\frac{1}{2}gt + v_{0y} = 0$$



$$T = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0\sin\theta_0}{g}$$

T را در رابطه x می‌گذاریم:

$2\sin\theta_0\cos\theta_0 = \sin 2\theta_0$

$$R = \underbrace{v_{0x}}_{v_0\cos\theta_0} \times \frac{2v_0\sin\theta_0}{g} \Rightarrow R = \frac{v_0^2\sin 2\theta_0}{g}$$

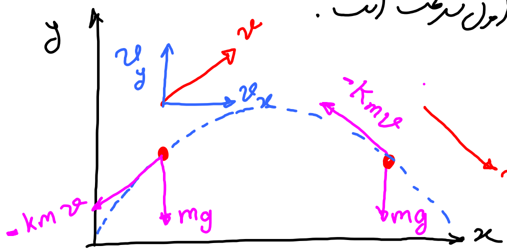
* برای یافتن معادله مسیر، زمان را از یک معادله حذف و در معادله دیگر می‌گذاریم:

$$x = v_{0x}t \Rightarrow t = \frac{x}{v_{0x}}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t \Rightarrow y = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\theta_0} + \cancel{v_0}\sin\theta_0 \times \frac{x}{\cancel{v_0}\cos\theta_0}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta_0} + x\tan\theta_0 \longrightarrow \text{معادله یک سهمی است}$$

مثال ۴: مثال قبل را در حضور مقاومت هوا حل کنید. مقاومت هوا متناسب با توان اول سرعت است.



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} -k\cancel{m}v_x = \cancel{m}\ddot{x} \longrightarrow \text{همان مثال ۱} \\ -\cancel{m}g - k\cancel{m}v_y = \cancel{m}\ddot{y} \rightarrow \text{۲ '' ''} \end{cases}$$

فرق مثال ۲ با قسمت y مربوط به این مثال فقط در شرایط اولیه است. در اینجا $y_0 = 0$ است پس h مثال ۲ باید برابر صفر انتخاب شود.

مثال ۱ : $x = \dfrac{\boxed{v_0}}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$ ، $v_0 \rightarrow v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 = U$

مثال ۲ : $\cancel{x}\, y = -\dfrac{g}{k}t + \dfrac{1}{k}\left(\boxed{v_0} + \dfrac{g}{k}\right)\left(1 - e^{-kt}\right) + \cancel{h}^{\,0}$ ، $v_0 \rightarrow v_{0y} = v_0 \sin\theta_0 = V$

می‌خواهیم برد را بدست بیاوریم. پس $y=0$ می‌گذاریم، زمان را پیدا کرده و در x جایگذاری می‌کنیم.

$$-\frac{g}{\cancel{k}}t + \frac{1}{\cancel{k}}\left(V + \frac{g}{k}\right)\left(1 - e^{-kt}\right) = 0 \Longrightarrow t = 0 \quad : \text{لحظه اولیه پرتاب}$$

$$\longrightarrow T = \left(\frac{V}{g} + \frac{1}{k}\right)\left(1 - e^{-kT}\right)$$

برای حل مسأله از دو روش تحلیلی و عددی می‌توان استفاده کرد.

بسط تیلور تابع نمایی : $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

برای x کوچک

برای k های کوچک : $T = \left(V/g + 1/k\right)\left[\cancel{1} - \left(\cancel{1} - kT + \dfrac{k^2T^2}{2!} - \dfrac{k^3T^3}{3!} + \cancel{\cdots}^{\,0}\right)\right]$

$$\Longrightarrow T = \left(V/g + 1/k\right)\left(kT - \frac{k^2T^2}{2} + \frac{k^3T^3}{6}\right)$$

$$\Longrightarrow \cancel{T} = \frac{\cancel{k}VT}{g} + \cancel{T} - \frac{k^{\cancel{2}}T^{\cancel{2}}V}{2g} - \frac{\cancel{k}T^{\cancel{2}}}{2} + \frac{k^{\cancel{3}\,2}T^{\cancel{3}\,2}V}{6g} + \frac{k^{\cancel{2}}T^{\cancel{3}\,2}}{6}$$

$$\Longrightarrow 0 = \frac{V}{g} - T/2\left(\frac{kV}{g} + 1\right) + kT^2/6\left(kV/g + 1\right)$$

$$\Longrightarrow T = \frac{V/g}{\frac{1}{2}\left(\frac{kV}{g} + 1\right)} + \frac{1}{\cancel{6}_{3}}kT^2 \frac{\cancel{kV/g + 1}}{\cancel{1/2}\left(\cancel{kV/g + 1}\right)}$$

$$\Longrightarrow T = \frac{2V/g}{kV/g + 1} + 1/3\, kT^2$$

$$\frac{1}{1+x} \simeq 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \qquad |x| << 1$$

$$\frac{1}{1 + kV/g} \simeq 1 - kV/g + \left(kV/g\right)^2 + O(3) \qquad \frac{kV}{g} << 1$$

$\frac{kV}{g} \ll 1 \rightarrow \boxed{k \ll \frac{g}{V}}$

$$\Rightarrow T = \frac{2V}{g}\left(1 - \frac{kV}{g} + \frac{k^2V^2}{g^2}\right) + \frac{1}{3}kT^2 \quad *$$

اگر $k=0$ $\Rightarrow T = \frac{2V}{g} = \frac{2v_0\sin\theta_0}{g}$ ✓ $\longrightarrow$ در تطابق با حالتی که قبلاً بررسی کردیم

عدم وجود مقاومت هوا

با استفاده از روش تکرار، T بالا را در سمت راست رابطه $*$ قرار می‌دهیم.

$$T = \frac{2V}{g}\left(1 - \frac{kV}{g} + \frac{k^2V^2}{g^2}\right) + \frac{1}{3}k\left(\frac{2V}{g}\right)^2 \Rightarrow T = \frac{2V}{g}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{kV}{g}\right)$$

حال این T را در رابطه x می‌گذاریم :

$$R' = \frac{U}{k}\left(1 - e^{-kT}\right) = \frac{U}{k}\left(+kT - \frac{1}{2}k^2T^2 + \frac{1}{6}\cancel{k^3T^3}^{\,0}\right)$$

$$\Rightarrow R' = U\left(T - \frac{1}{2}kT^2\right) = \cdots \Rightarrow R' = \underbrace{\frac{2UV}{g}}_{R}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{kV}{g}\right)$$

$$\frac{2UV}{g} = \frac{2v_0\cos\theta_0 \times v_0\sin\theta_0}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\theta_0}{g} = R$$