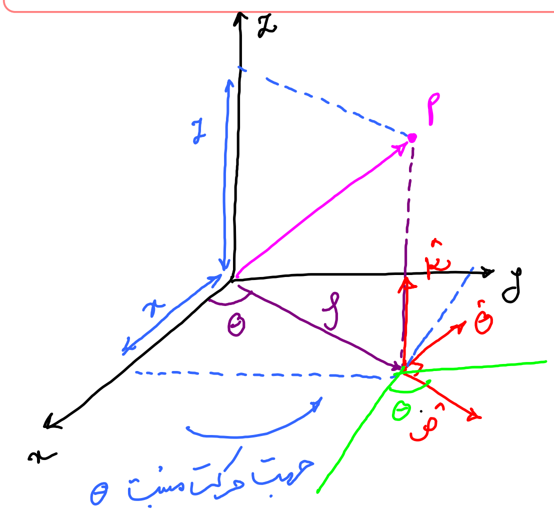
جلسه دوم : دستگاه مختصات استوانه‌ای و کروی   فصل دوم : مکانیک نیوتونی   قوانین نیوتون

دستگاه‌های مرجع   معادله حرکت کلی ذره   نیروهای مقاومت (سیال)



دستگاه مختصات استوانه‌ای

مختصات دکارتی : (x,y,z)

" استوانه‌ای : (ρ,θ,z)

$x=\rho\cos\theta$ | $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$

$y=\rho\sin\theta$ | $\theta=\tan^{-1} y/x$

$z=z$ | $z=z$

ارتباط بین بردار یکه‌های مختصات استوانه‌ای و دکارتی :

(1) $\hat{\rho}=\cos\theta\,\hat{i}+\sin\theta\,\hat{j}$

(2) $\hat{\theta}=-\sin\theta\,\hat{i}+\cos\theta\,\hat{j}$

$\Rightarrow \hat{\rho}\cdot\hat{\theta}=-\cos\theta\sin\theta+\sin\theta\cos\theta=0$

$\hat{k}=\hat{k}$

سرعت در دستگاه استوانه‌ای

بردار مکان $\vec{r}=\rho\hat{\rho}+z\hat{k}$

در دکارتی : $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$

$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\hat{i}+\frac{dy}{dt}\hat{j}+\frac{dz}{dt}\hat{k}$

$\vec{v}=\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}+\dot{z}\hat{k}$

$\vec{a}=\ddot{x}\hat{i}+\ddot{y}\hat{j}+\ddot{z}\hat{k}$

$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\underbrace{\frac{d\rho}{dt}}_{\dot{\rho}}\hat{\rho}+\rho\underbrace{\frac{d\hat{\rho}}{dt}}_{?}+\frac{dz}{dt}\hat{k}$

(1) $\frac{d\hat{\rho}}{dt}=\underbrace{\frac{d\hat{\rho}}{d\theta}}_{?}\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\dot{\theta}}=\dot{\theta}\hat{\theta}$

$d\hat{\rho}/d\theta=-\sin\theta\,\hat{i}+\cos\theta\,\hat{j}\overset{(2)}{=}\hat{\theta}$

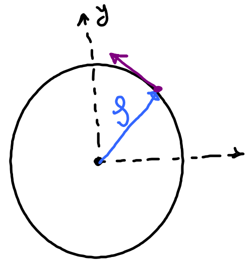
$\vec{v}=\dot{\rho}\hat{\rho}+\rho\dot{\theta}\hat{\theta}+\dot{z}\hat{k}$

$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\ddot{\rho}\hat{\rho}+\dot{\rho}\underbrace{\frac{d\hat{\rho}}{dt}}_{\dot{\theta}\hat{\theta}}+\overbrace{\frac{d\rho}{dt}}^{\dot{\rho}}\dot{\theta}\hat{\theta}+\rho\ddot{\theta}\hat{\theta}+\rho\dot{\theta}\overbrace{\underbrace{\frac{d\hat{\theta}}{dt}}_{?}}^{-\dot{\theta}\hat{\rho}}+\ddot{z}\hat{k}$

(2) : $\hat{\theta}=-\sin\theta\,\hat{i}+\cos\theta\,\hat{j}$

$\frac{d\hat{\theta}}{dt}=\frac{d\hat{\theta}}{d\theta}\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\dot{\theta}}=\dot{\theta}(\underbrace{-\cos\theta\,\hat{i}-\sin\theta\,\hat{j}}_{\text{از رابطه (1)}\;=-\hat{\rho}})=-\hat{\rho}\dot{\theta}$

$$\Rightarrow \vec{a}=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho}+(\rho\ddot{\theta}+2\dot{\rho}\dot{\theta})\hat{\theta}+\ddot{z}\hat{k}$$



حالت خاص I : حرکت دایره‌ای

$\rho = R =$ ثابت : شعاع دایره

$\vec{r} = \rho\hat{\rho} \longrightarrow \dot{\rho} = 0 \,,\ \ddot{\rho} = 0$

$\vec{v} = \cancel{\dot{\rho}\hat{\rho}} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta} = R\dot{\theta}\hat{\theta}$: سرعت مماس بر دایره است

$\vec{a} = -\underbrace{R\dot{\theta}^2}_{\text{شتاب جانب مرکز}}\hat{\rho} + \underbrace{R\ddot{\theta}}_{\text{شتاب مماسی}}\hat{\theta}$

rafibakhsh.ir

حالت خاص II : حرکت دایره‌ای یکنواخت

$\dot{\theta} =$ ثابت $= \omega$: سرعت زاویه‌ای

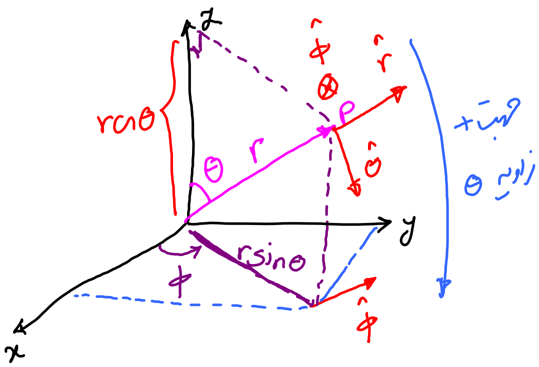
$\Longrightarrow \ddot{\theta} = 0$

$\vec{r} = \rho\hat{\rho}$

$\vec{v} = R\omega\hat{\theta}$

$\vec{a} = -R\omega^2\hat{\rho}$: شتاب جانب مرکز

مختصات کروی



$(x,y,z) \longrightarrow (r,\theta,\phi)$

$x = r\sin\theta\cos\phi \qquad 0 \leq r < \infty$

$y = r\sin\theta\sin\phi \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$

$z = r\cos\theta \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi$

$\hat{r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k}$

$\hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{i} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{k}$

$\hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{i} + \cos\phi\,\hat{j}$

$\hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0$

$\hat{r}\cdot\hat{\phi} = 0$

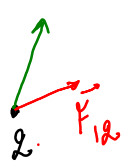
$\hat{\theta}\cdot\hat{\phi} = 0$

$\vec{r} = r\hat{r} \longrightarrow \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi}$

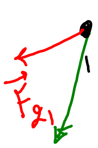
*تمرین : سرعت و شتاب دستگاه کروی را بیابید.

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2)\hat{\theta}$$
$$+ (r\sin\theta\,\ddot{\phi} + 2\dot{r}\sin\theta\,\dot{\phi} + 2r\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\phi})\hat{\phi}$$

نقض نیوتن

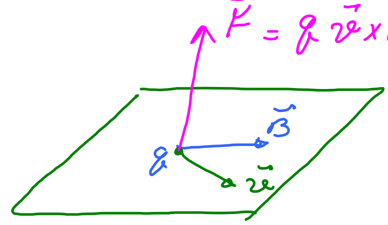


$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$



نقض قوی قانون سوم نیوتن

$\vec{F} = q\,\vec{v}\times\vec{B}$

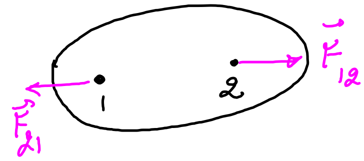


نقض ضعیف

قانون سوم نیوتن

جرم اینرسی

$$\left.\begin{aligned}\vec F_{21} &= m_1 \vec a_1\\ \vec F_{12} &= m_2 \vec a_2\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \vec F_{21} = -\vec F_{12}$$



$$|\vec F_{21}| = |\vec F_{12}|$$

$$m_1 a_1 = m_2 a_2 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2} \xRightarrow{m_1 = 1} m_2 = \frac{a_1}{a_2}$$

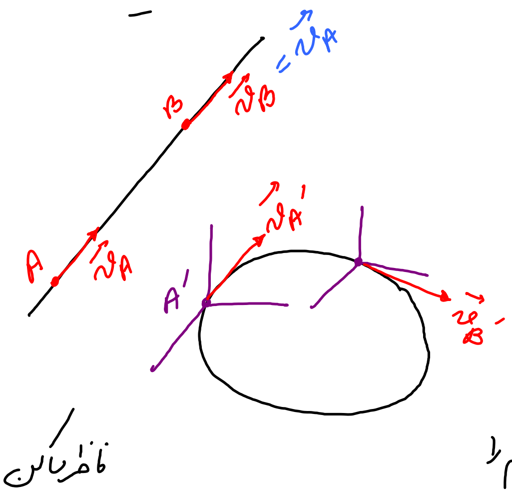
جرم گرانشی: جرم را در میدان گرانشی قرار می‌گذاریم، وزن جسم را اندازه می‌گیریم:

$$\vec W = m\vec g$$

$$\Longrightarrow m = \frac{|\vec W|}{|\vec g|} \quad : \text{جرم گرانشی}$$

گالیله نشان داد که این دو جرم با هم برابرند. (اصل هم‌ارزی)

دستگاه لخت: دستگاهی است که تمامی ناظرهای آنها قوانین نیوتون را به یک شکل می‌نویسند. یا دستگاه‌هایی هستند که نسبت به هم ساکن و یا با سرعت ثابت حرکت می‌کنند.



ناظر ساکن : $\vec v_A = \vec v_{A'}$

$\vec v_B \neq \vec v_{B'}$

در نقطه A'، ناظر دستگاه پریم‌دار، ناظر دستگاه بدون پریم را ساکن می‌بیند. در نقطه B' ناظر دستگاه پریم‌دار، ناظر دستگاه بدون پریم را متحرک می‌بیند بنابراین سرعت در این بازه زمانی تغییر کرده است. پس ناظر پریم‌دار غیرلخت است.

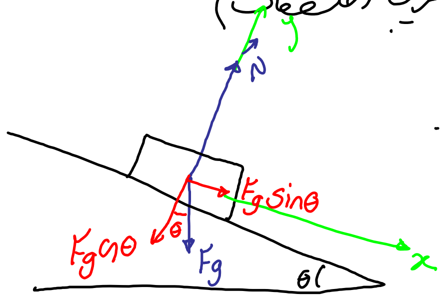
چون ناظر دستگاه بدون پریم نسبت به ناظر ساکن با سرعت یکنواخت حرکت می‌کند، ناظر لخت است.

نیروهای مقاومت ← ① نیروی اصطکاک

$f = \mu N$

μ ← خاصیت جسم (ضریب اصطکاک)

N ← نیروی عمودی سطح



مثال ۱: یک جسم به جرم m روی یک سطح شیبدار به زاویه θ قرار گرفته است. اگر سطح بدون اصطکاک باشد. الف- شتاب حرکت را حساب کنید.

$$\sum \vec F = m\vec a : \begin{cases} x: F_g \sin\theta = m\ddot x \rightarrow a = \frac{F_g}{m}\sin\theta = g\sin\theta \\ y: \vec N + \vec F_g \cos\theta = 0 \rightarrow N = F_g\cos\theta \end{cases}$$

ب - سرعت جسم را وقتی از بالای سطح به اندازه x_0 حرکت کرده است را بیابید. (سرعت اولیه صفر است)

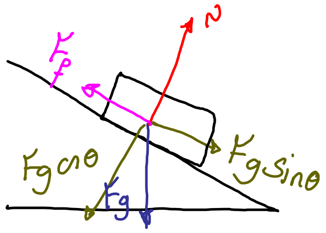
$$\ddot{x} = g\sin\theta \xrightarrow{2\dot{x}} 2\dot{x}\ddot{x} = 2\dot{x}\, g\sin\theta \Rightarrow \frac{d}{dt}\dot{x}^2 = 2g\sin\theta \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2) = 2\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dt}$$

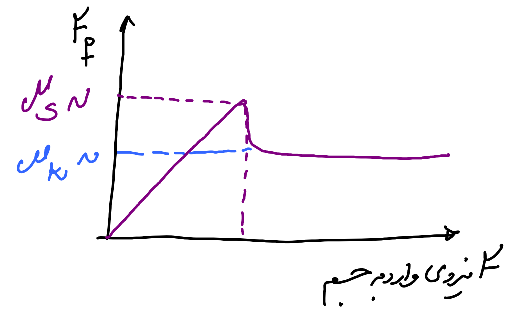
$$\Rightarrow \underbrace{\int \frac{d}{dt}(\dot{x}^2)\, dt}_{\int d(\dot{x})^2} = 2g\sin\theta \underbrace{\int \frac{dx}{dt}\, dt}_{\int dx} \Rightarrow \dot{x}^2\Big|_0^{v} = 2g\sin\theta\; x\Big|_0^{x_0}$$

$$\Rightarrow v^2 = 2g\sin\theta\, x_0$$

مثال ۲: در مثال قبل، اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین سطح شیب‌دار و جسم برابر μ_s باشد، در چه زاویه‌ای جسم در آستانه حرکت قرار می‌گیرد؟



نکته: تا موقعی که جسم حرکت نکرده است، نیروی اصطکاک برابر $mg\sin\theta$ است.



در آستانه حرکت : $F_s = (F_f)_{max} = \mu_s N$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} x: F_g\sin\theta - F_s = 0 \\ y: F_g\cos\theta - N = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_s = \mu_s N = F_g\sin\theta \\ N = F_g\cos\theta \end{cases} \to \mu_s F_g\cos\theta = F_g\sin\theta \to \tan\theta = \mu_s$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\mu_s$$

اگر : $\mu_s = 0/4 \Rightarrow \theta \simeq 22^\circ$

۲) نیروی مقاومت سیال retarding force

$\vec{F}_r = \vec{F}_r(v^n)$: همیشه خلاف جهت حرکت جسم است.

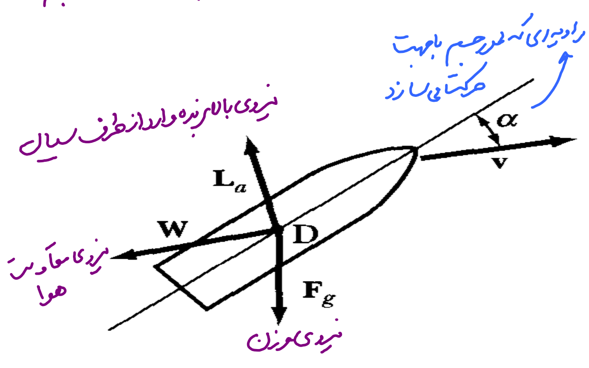
v^n: سرعت جسم

این نیروها ثابت نبوده و خلاف جهت حرکت جسم هستند.

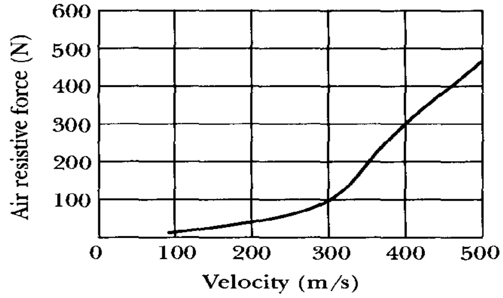
$F_r \propto v^n \to F_r = mk\, v^n\, \hat{v}$

k: ثابت مثبت

$\hat{v}$: بردار یکه در جهت سرعت ذره



(a)



بصورت تجربی :

$v < 24\ m/s \quad : \quad n \simeq 1$

$24 < v < 330\ m/s \quad : \quad n \simeq 2$

یک تقریب برای مقاومت هوا

سطح مقطع جسم که بر سرعت عمود است

$$W = \frac{1}{2} C_w \rho A v^2$$

سرعت

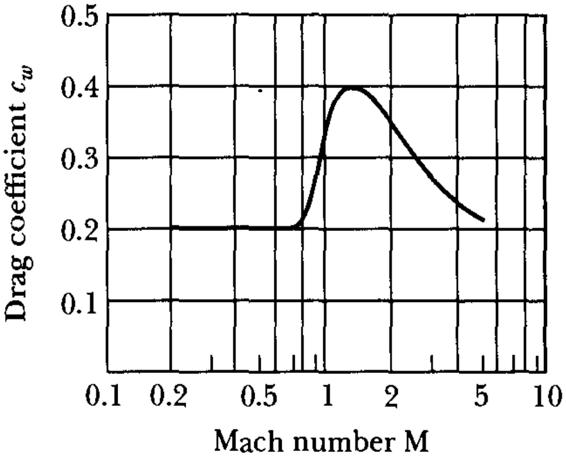
ضریب پس کشش

drag coefficient

چگالی هوا

ضریب پس کشش یک کمیت بدون بعد است که بصورت تجربی بدست می‌آید.

که در نمودار مقابل برحسب عدد ماخ $\left(\frac{\text{سرعت صوت}}{\text{سرعت نور}} \right)$ کشیده شده است.



(b)