نمایش هندسی تکانه زاویه‌ای

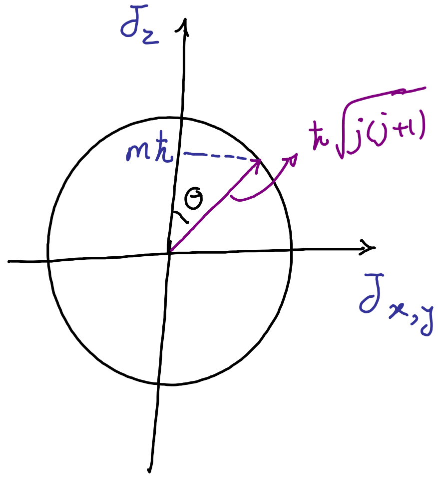
داشتیم: $J^2|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j,m\rangle$

$$\langle J^2\rangle = \langle j,m|J^2|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)\underbrace{\langle j,m|j,m\rangle}_{1}$$

$$\Rightarrow \langle J^2\rangle = \hbar^2 j(j+1) \Rightarrow \sqrt{\langle J^2\rangle} = \hbar\sqrt{j(j+1)}$$

داشتیم: $J_z|j,m\rangle = m\hbar|j,m\rangle \Rightarrow \langle J_z\rangle = m\hbar$

$$\cos\theta = \frac{m\hbar}{\hbar\sqrt{j(j+1)}} \quad ; \quad -j\le m\le j$$

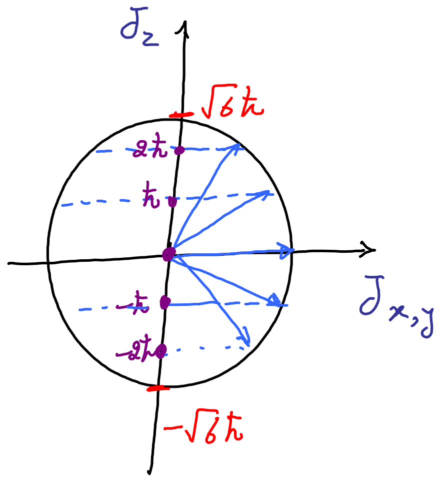


$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \Rightarrow J_x^2 + J_y^2 = J^2 - J_z^2$$

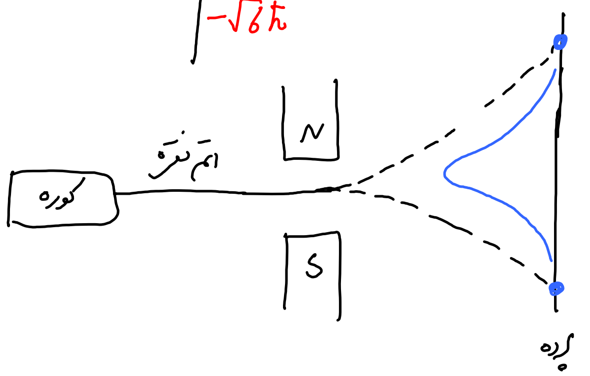
مثال: $\underline{j=2} \rightarrow -2\le m\le 2$

$m=-2,-1,0,1,2$

شعاع دایره $= \hbar\sqrt{2(2+1)} = \sqrt{6}\hbar$



مدرک تجربی دال بر وجود اسپین



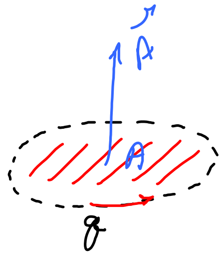
اگر الکترون مدار آخر در تراز 5S ($l=0$) باشد، دو نقطه روشن روی پرده دیده می‌شود.

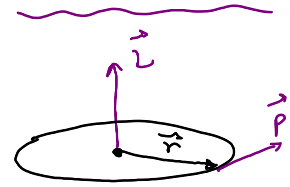
* نکته: اسپین یک عدد کوانتومی ذاتی برای هر ذره است.

اسپین به درجات آزادی فضایی ربطی ندارد پس با چرخش توصیف نمی‌شود.

گشتاور دوقطبی مغناطیسی

فیزیک کلاسیک: $\vec{\mu} = I\vec{A}$





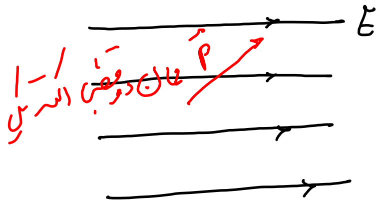
در کوانتوم: $\boxed{\vec{\mu}_l = \frac{q\vec{L}}{2mc}}$

تکانه زاویه‌ای مداری

گشتاور دوقطبی مداری

ممان دوقطبی اسپینی : $\boxed{\vec{\mu}_s = \frac{q\vec{S}}{2mc} g_s}$ برای الکترون : $g_s \simeq 2$

ثابت ژیرومغناطیسی یا فاکتور لانده



انرژی ممان مغناطیسی در میدان مغناطیسی : $U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ $\longleftrightarrow$ انرژی دوقطبی در میدان الکتریکی : $U = -\vec{p}\cdot\vec{E}$

در آزمایش SG (اشترن - گرلاخ) : یک الکترون با میدان مغناطیسی از طریق ممان دوقطبی مغناطیسی برهم‌کنش می‌کند.

تراز 5S الکترون $\longrightarrow l = 0 \Longrightarrow \vec{\mu} = \vec{\mu}_s \Longrightarrow U = -\vec{\mu}_s\cdot\underbrace{\vec{B}}_{B\hat{z}} \overset{q=-e}{=} \frac{-(-e)B}{mc}\underbrace{\hat{S}\cdot\hat{z}}_{S_z}$

$$\Longrightarrow U = \frac{eB}{mc}S_z \longrightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla}U = \underbrace{\frac{-eS_z}{mc}}\vec{\nabla}B$$

چون در آزمایش SG دو نقطه روشن دیده می‌شود پس S_z می‌تواند دو مقدار یکسان با علامت‌های مخالف داشته باشد.

$m_s = \mp 1/2 \Longleftarrow \langle S_z\rangle = \mp\hbar/2$

$s = 1/2$

تمامی ذراتی که اسپین نیمه صحیح داشته باشند، فرمیون هستند. مثل کوارک‌ها، الکترون، پروتون، نوترون و ...

تمامی ذراتی که اسپین صحیح داشته باشند، بوزون هستند، مثل فوتون، ذره هیگز و ...

نتیجه آزمایش اشترن - گرلاخ : اسپین یک کمیت کوانتیده است. اگر اسپین یک ذره برابر s باشد، تصویر اسپین روی محور z را با S_z نشان می‌دهیم که می‌تواند مقادیر $-s \le m_s \le s$ داشته باشد.

نظریه عام اسپین

نظریه اسپین مشابه با نظریه تکانه زاویه‌ای است.

$J^2 \longleftrightarrow S^2$

$J_i \longleftrightarrow S_i$

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k \longleftrightarrow [S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k$$

$$[J^2, J_z] = 0 \Longrightarrow |j, m\rangle \longleftrightarrow [S^2, S_z] = 0 \Longrightarrow |s, m_s\rangle$$

$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$

$$\Longrightarrow \quad S^2|s,m_s\rangle = \hbar^2\, s(s+1)\,|s,m_s\rangle \qquad \left(S_z^{(s)}\right)_{m_s' m_s} \qquad \delta_{m_s' m_s}$$

$$S_z|s,m_s\rangle = m_s\hbar\,|s,m_s\rangle \longrightarrow \langle s,m_s'|S_z|s,m_s\rangle = m_s\hbar\,\langle s,m_s'|s,m_s\rangle$$

$$S_\pm|s,m_s\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1)-m_s(m_s\pm1)}\;|s,m_s\pm1\rangle$$

$$\langle j',m'|j,m\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'} \longleftrightarrow \langle s',m'|s,m\rangle = \delta_{ss'}\delta_{m_s m_s'}$$

$$\sum_{m=-j}^{j}|j,m\rangle\langle j,m| = \mathbb{1} \longleftrightarrow \sum_{m_s=-s}^{+s}|s,m_s\rangle\langle s,m_s| = \mathbb{1}$$

مثال : اسپینِ ½ و ماتریس‌های پائولی

$$s=\tfrac12 \Longrightarrow \underbrace{-s\leqslant m_s\leqslant +s}_{\text{2s+1 حالت داریم.}} \longrightarrow m_s=-\tfrac12,\ \tfrac12$$

پایه‌های راست هنجار : $\underbrace{|\tfrac12,\tfrac12\rangle}_{=|+\rangle}$ و $\underbrace{|\tfrac12,-\tfrac12\rangle}_{=|-\rangle}$

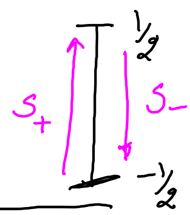
$$S^2|\tfrac12,\pm\tfrac12\rangle = \hbar^2\,\tfrac12(\tfrac12+1)\,|\tfrac12,\pm\tfrac12\rangle = \tfrac34\hbar^2\,|\tfrac12,\pm\tfrac12\rangle$$

$$S_z|\tfrac12,\pm\tfrac12\rangle = \pm\tfrac12\hbar\,|\tfrac12,\pm\tfrac12\rangle \longrightarrow$$

شکل ماتریسی S^2 :

$$S^2 = \begin{pmatrix} \tfrac34\hbar^2 & 0 \\ 0 & \tfrac34\hbar^2 \end{pmatrix}$$

$$S_z = \begin{array}{c|cc} m' \downarrow & m=\tfrac12 & -\tfrac12 \\ \hline \tfrac12 & \tfrac12\hbar & 0 \\ -\tfrac12 & 0 & -\tfrac12\hbar \end{array}$$



$$S_+|\tfrac12,+\tfrac12\rangle = 0 \quad , \quad S_+|\tfrac12,-\tfrac12\rangle = \hbar\sqrt{\cancel{\tfrac12(\tfrac12+1)-(-\tfrac12)(-\tfrac12+1)}^{\,1}}\;|\tfrac12,\underbrace{\tfrac12}_{-\frac12+1}\rangle$$

$$S_-|\tfrac12,-\tfrac12\rangle = 0 \quad , \quad S_-|\tfrac12,\tfrac12\rangle = \hbar\,|\tfrac12,-\tfrac12\rangle$$

نمادگذاری جدید : $S_+|+\rangle = 0 \quad , \quad S_+|-\rangle = \hbar|+\rangle \longrightarrow \langle -|S_+|-\rangle = \hbar\langle -|+\rangle = 0$

$\langle +|S_+|+\rangle = 0 \quad , \quad \langle -|S_+|+\rangle = 0 \qquad \langle +|S_+|-\rangle = \hbar\langle +|+\rangle = \hbar$

$S_-|-\rangle = 0 \quad , \quad S_-|+\rangle = \hbar|-\rangle$

نمایش ماتریسی S_+ :

$$S_+ = \begin{array}{c|cc} & |+\rangle & |-\rangle \\ \hline \langle +| & 0 & \hbar \\ \langle -| & 0 & 0 \end{array}$$

$S_-|-\rangle = 0$, $S_-|+\rangle = \hbar|-\rangle$

$\langle -|S_-|-\rangle = 0$ $\qquad$ $\langle -|S_-|+\rangle = \hbar\langle -|-\rangle = \hbar$

$\langle +|S_-|-\rangle = 0$ $\qquad$ $\langle +|S_-|+\rangle = \hbar\langle +|-\rangle = 0$

نمایش ماتریسی S_- :

$$S_- = \begin{array}{c|cc} & |+\rangle & |-\rangle \\ \hline \langle +| & 0 & 0 \\ \langle -| & \hbar & 0 \end{array}$$

$$S_\pm^\dagger = S_\mp$$

$$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-) \Longrightarrow S_x = \frac{\hbar}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_x}$$

$$S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-) \Longrightarrow S_y = \frac{\hbar}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_y}$$

بدست آورده بودیم : $S_z = \frac{\hbar}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\sigma_z}$

$$\Longrightarrow \boxed{S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i}$$

ماتریس های پاؤلی

خواص ماتریس های پاؤلی

* $\sigma_i^2 = 1$ ①

* $\boxed{[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k} \longrightarrow [\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z$

* $\boxed{\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}} \Longrightarrow \begin{cases} \{\sigma_i, \sigma_i\} = 2\mathbb{1} & ; \ i=j \\ \{\sigma_i, \sigma_j\} = 0 & ; \ i\neq j \end{cases}$

رابطه ① را نتیجه می دهد.

* $\sigma_i^\dagger = \sigma_i \rightsquigarrow$ ماتریس های پاؤلی هرمیتی هستند.

* $\mathrm{Tr}(\sigma_i) = 0$

* $\det(\sigma_i) = -1$

* $\sigma_x\sigma_y\sigma_z = i\mathbb{1}$

($\vec{A}$ و $\vec{B}$ بردار هستند)

* $(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\vec{B})\mathbb{1} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$ ②

* $e^{i\alpha\sigma_j} = \mathbb{1}\cos\alpha + i\sigma_j\sin\alpha$ ③

اثبات رابطه ② :

یادآوری : $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_i b_i$

$(\vec{a}\times\vec{b})_i = \epsilon_{ijk}\, a_j b_k$

$$LHS = \sigma_i A_i \sigma_j B_j = \underbrace{\sigma_i \sigma_j}_{?} (A_i B_j) = (\delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k) A_i B_j$$

$$= \delta_{ij} A_i B_j + i\,\epsilon_{ijk}\sigma_k A_i B_j = \underbrace{A_i B_i}_{\vec{A}\cdot\vec{B}} + i\overbrace{\underbrace{\epsilon_{ijk} A_i B_j}_{(\vec{A}\times\vec{B})_k} \sigma_k}^{(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{\sigma}}$$

* از دو رابطه :

$$\begin{cases} \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \\ \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} \end{cases} \xrightarrow{+} \cancel{2}\,\sigma_i \sigma_j = \cancel{2}(i\epsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij})$$

$\vec{\sigma}$ مفهوم : $\vec{\sigma} = \sigma_x \hat{i} + \sigma_y \hat{j} + \sigma_z \hat{k} \longrightarrow \vec{\sigma}\cdot\hat{k} = \sigma_z$

$\vec{\sigma}\cdot\hat{i} = \sigma_x$