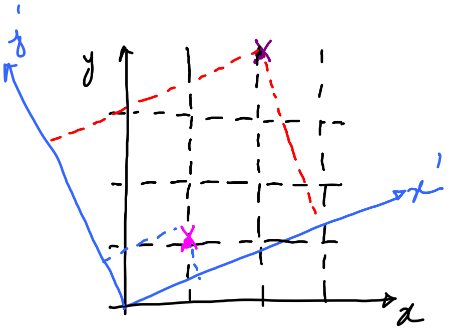
فصل ۱: ماتریس‌ها، بردارها و حساب برداری - مفهوم اسکالر - تبدیلات مختصات - خواص ماتریس چرخش

اهمیت هندسی ماتریس‌های چرخش - تعریف بردار - ضرب داخلی و خارجی - دستگاه مختصات قطبی و کروی

rafibakhsh.ir

مفهوم اسکالر: کمیتی است که تحت تبدیلات دستگاه مختصات تغییر نمی‌کند.



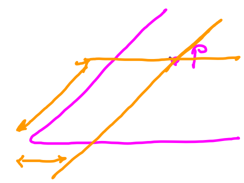
$M(1,1) = 2\ kg$

$M(2,4) = 6\ kg$

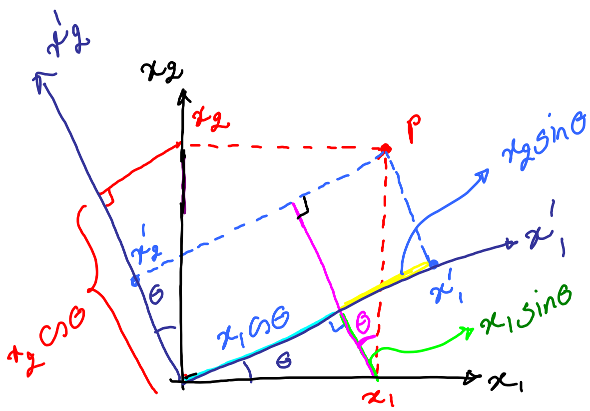
$M(1/2,1) = 2\ kg$

$M(3,3) = 6\ kg$

بعد چرخش دستگاه مختصات، مختصات نقاط عوض شده اما جرم نقاط تغییر نکرده است.



تبدیلات دستگاه مختصات



ارتباط بین مختصه‌های نقطه P در دستگاه پریم‌دار و بدون پریم را می‌یابیم.

$$x'_1 = x_1\cos\theta + x_2\sin\theta = x_1\lambda_{11} + x_2\lambda_{12}$$

$$x'_2 = x_2\cos\theta - x_1\sin\theta = x_1\lambda_{21} + x_2\lambda_{22}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}' = \underset{\sim}{\lambda}\ \vec{x}$$

رابطه برداری

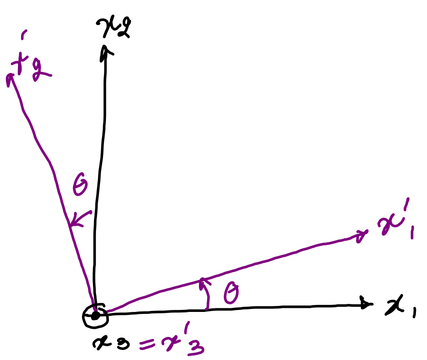
$$x'_i = \sum_{j=1}^{2} \lambda_{ij} x_j$$

$\lambda_{ij} \equiv \cos(x'_i, x_j) \rightsquigarrow$ کسینوس زاویه بین محور x'_i و x_j

$$\lambda_{11} = \cos(x'_1, x_1) = \cos\theta \quad , \quad \lambda_{12} = \cos(x'_1, x_2) = \cos(\pi/2 - \theta) = \sin\theta$$

$$\lambda_{21} = \cos(x'_2, x_1) = \cos(\pi/2 + \theta) = -\sin\theta \quad , \quad \lambda_{22} = \cos(x'_2, x_2) = \cos\theta$$

تعمیم به حالت سه‌بعدی



$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij} x_j$$

$$\lambda_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$$

$$\lambda_{11} = \cos\theta \quad , \quad \lambda_{12} = \cos(\pi/2 - \theta) = \sin\theta$$

$$\lambda_{13} = \cos(\pi/2) = 0$$

$\lambda_{21} = \cos(\pi/2 + \theta) = -\sin\theta \qquad \lambda_{22} = \cos\theta \qquad \lambda_{23} = \cos\pi/2 = 0$

$\lambda_{31} = 0 \quad , \quad \lambda_{32} = 0 \quad , \quad \lambda_{33} = \cos 0 = 1$

$$\underset{\sim}{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

← ماتریس چرخش حول محور z به اندازه θ در جهت پادساعتگرد

$A_{ij} = a_i b_j \qquad i = 1,2 \quad j = 1,2,3$

$A_{11} = a_1 b_1 \qquad A_{21} = a_2 b_1$

$A_{12} = a_1 b_2 \qquad A_{22} = a_2 b_2$

$A_{13} = a_1 b_3 \qquad A_{23} = A_3 b_3$

$$C_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ij} d_j \xrightarrow{i=1} C_1 = \sum_{j=1}^{3} A_{1j} d_j = A_{11} d_1 + A_{12} d_2 + A_{13} d_3$$

$$\xrightarrow{i=2} C_2 = \sum_{j=1}^{3} A_{2j} d_j = A_{21} d_1 + A_{22} d_2 + A_{23} d_3$$

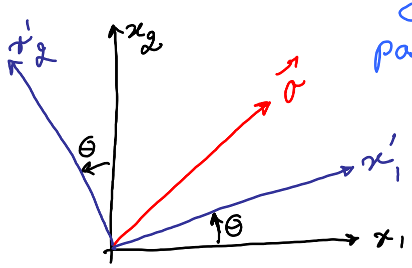
(Kronecker) دلتای کرونیکر

خاصیت ماتریس چرخش: طول یا اندازه بردار را تغییر نمی‌دهد.

$$\boxed{\sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij} \lambda_{kj} = \delta_{ik}} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

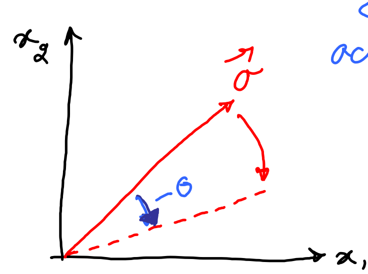
← orthogonal یک ماتریس متعامد

رابطه تعامد که برای ماتریس‌های متعامد برقرار است



منفعل

passive تبدیل



فعال

active تبدیل

* تمرین امتیازی: بصورت ریاضی نشان دهید این دو تبدیل معادلند.

ماتریس‌ها

$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B} \implies C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$

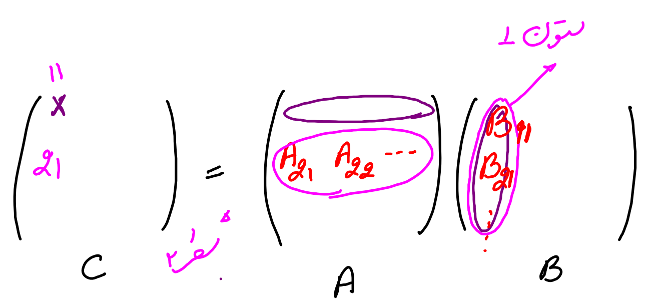
$= \underset{\sim}{B} + \underset{\sim}{A}$

شماره سطر

شماره ستون

$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B} \implies C_{ij} = \sum_{k=1}^{3} A_{ik} B_{kj}$

$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B} \neq \underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{A}$



$C_{21} = A_{21} B_{11} + A_{22} B_{21} + A_{23} B_{31} + \cdots$

ماتریس ترانهاده (transpose)

$\underset{\sim}{A} \longrightarrow \underset{\sim}{A}^T$

$(A^T)_{ij} = A_{ji}$

ماتریس همانی $\mathbb{1}$: (Identity)

$A\mathbb{1} = \mathbb{1}A = A$

فرض کنید که λ یک ماتریس متعامد است:

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}$$

$$\lambda^T = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} \end{pmatrix}$$

$$\lambda\lambda^T = \begin{pmatrix} \underbrace{\lambda_{11}^2 + \lambda_{12}^2}_{=1} & \cancel{\lambda_{11}\lambda_{21} + \lambda_{12}\lambda_{22}}\ 0 \\ \cancel{\lambda_{21}\lambda_{11} + \lambda_{22}\lambda_{12}}\ 0 & \underbrace{\lambda_{21}^2 + \lambda_{22}^2}_{=1} \end{pmatrix} = \mathbb{1} \Longrightarrow \boxed{\lambda\lambda^T = \mathbb{1}}$$

تعریف ماتریس های متعامد.

از طرفی $\lambda\lambda^{-1} = \mathbb{1}$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda\lambda^T = \mathbb{1} \\ \lambda\lambda^{-1} = \mathbb{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lambda^{-1} = \lambda^T}$$

رابطه تعامد : $\displaystyle\sum_{j=1}^{2} \lambda_{kj}\lambda_{ij} = \delta_{ik}$

$i = k = 1$: $\displaystyle\sum_{j=1}^{2} \lambda_{1j}\lambda_{1j} = \delta_{11} = 1 \Longrightarrow \lambda_{11}\lambda_{11} + \lambda_{12}\lambda_{12} = 1 \Longrightarrow \lambda_{11}^2 + \lambda_{12}^2 = 1$

$i = k = 2$: $\displaystyle\sum_{j=1}^{2} \lambda_{2j}\lambda_{2j} = \delta_{22} = 1 \Longrightarrow \lambda_{21}^2 + \lambda_{22}^2 = 1$

$i = 1, k = 2$: $\displaystyle\sum_{j=1}^{2} \lambda_{2j}\lambda_{1j} = \delta_{12} = 0 \Longrightarrow \lambda_{21}\lambda_{11} + \lambda_{22}\lambda_{12} = 0$

دترمینان ماتریس ها

$$\underset{\sim}{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} = \lambda_{11}\begin{vmatrix} \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{vmatrix} - \lambda_{12}\begin{vmatrix} \lambda_{21} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{33} \end{vmatrix} + \lambda_{13}\begin{vmatrix} \lambda_{21} & \lambda_{22} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_{11}(\lambda_{22}\lambda_{33} - \lambda_{23}\lambda_{32}) - \lambda_{12}(\lambda_{21}\lambda_{33} - \lambda_{23}\lambda_{31}) + \cdots$$

دترمینان ماتریس چرخش

$$\lambda = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \underbrace{\cos^2\theta - (-\sin^2\theta)}_{=1}$$

اگر $|\lambda| = 1 \Longrightarrow$ proper rotation → ماتریس های چرخش

اگر $|\lambda| = -1 \Longrightarrow$ improper rotation → انعکاس

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$

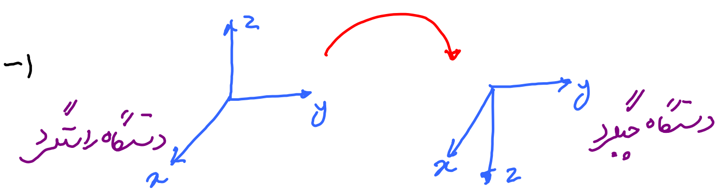
$\det A^T = \det A$

$$\lambda\lambda^T = 1 \Longrightarrow \det(\lambda\lambda^T) = \det 1 = 1$$

$$\det\lambda \cdot \det\lambda^T = (\det\lambda)^2 \Longrightarrow \boxed{\det\lambda = \mp 1}$$

دترمینان ماتریس های متعامد یا $+1$ و یا -1 است.

اگر: $\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \det\lambda = -1$



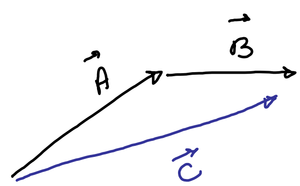
تعریف بردار

بردار موجودی است که تحت چرخش دستگاه مختصات، مؤلفه هایش از رابطه زیر پیروی می کند:

$$A'_i = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij} A_j$$

روابط بین بردارها

جمع بردارها: $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$



ضرب بردارها: (I) dot product $\vec{A}\cdot\vec{B}$ = عدد

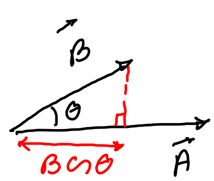
(II) cross product $\vec{A}\times\vec{B} = \vec{C}$: بردار

ضرب داخلی - نقطه ای - اسکالر

تعریف هندسی

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta$$

اندازه تصویر بردار $\vec{B}$ بر روی $\vec{A}$

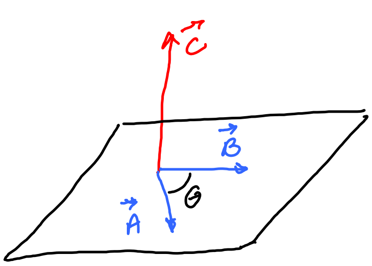


$$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3) \Longrightarrow |\vec{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

تعریف جبری: $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = \sum_{j=1}^{3} A_j B_j$

ضرب خارجی

تصویر هندسی: جهت بردار $\vec{C}$ از قاعده دست راست بدست می آید.



$$|\vec{C}| = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\sin\theta$$

تعریف جبری

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \hat{i}\underbrace{(A_2B_3 - A_3B_2)}_{C_1} + \hat{j}\underbrace{(A_3B_1 - A_1B_3)}_{C_2} + \hat{k}\underbrace{(A_1B_2 - A_2B_1)}_{C_3}$$

$$C_i = \sum_{j \text{ و } k} \epsilon_{ijk} A_j B_k$$

ϵ_{ijk} تانسور پادمتقارن :

- 0 اگر دو اندیس برابر باشند $\longrightarrow \epsilon_{112} = \epsilon_{222} = \cdots = 0$
- $+1$ جایگشت زوج $\longrightarrow \epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = 1$
- -1 جایگشت فرد $\longrightarrow \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1$

$1 \to 2 \to 3 \to 1$

$$C_1 = \epsilon_{123} A_2 B_3 + \epsilon_{132} A_3 B_2 \quad , \quad C_2 = \epsilon_{231} A_3 B_1 + \epsilon_{213} A_1 B_3$$

$$\Longrightarrow \boxed{C_i = \sum_{j \text{ و } k} \epsilon_{ijk} A_j B_k}$$

خاصیت ϵ_{ijk} : $\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{mlk} = \delta_{im}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jm}$

یک سری روابط

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$$

$$\downarrow$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{A})\cdot\vec{C} = 0$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

* تمرین : اگر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ دو بردار باشند ، با استفاده از خواص بردار ها تحت چرخش ، نشان دهید $\vec{A}\cdot\vec{B}$ یک اسکالر است .

$$\vec{A}'\cdot\vec{B}' \overset{?}{=} \vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$A'_i = \lambda_{ij} A_j$$

$$B'_i = \lambda_{ij} B_j$$

$$\vec{A}'\cdot\vec{B}' = A'_i B'_i = \lambda_{ij} A_j \lambda_{ik} B_k$$

$$= \underbrace{\lambda_{ij}\lambda_{ik}}_{\delta_{jk}} A_j B_k = \sum_j \sum_k \delta_{jk} A_j B_k = \sum_j A_j B_j = \vec{A}\cdot\vec{B} \quad \checkmark$$