جلسه پانزدهم : مدارها در یک میدان مرکزی حرکت سیاره‌ای - مسأله کپلر

$$\vec{F}(r) = f(r)\,\hat{r} \longrightarrow \vec{L} = \text{ثابت} \;,\; l = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{ثابت} \;,\; \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{l^2}\frac{1}{u^2}F(u) \longrightarrow \text{مسیر حرکت ذره}$$

$$E = \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] + U(u^{-1}) \qquad \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E-U) - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}} \quad (1)$$

مدارها در یک میدان مرکزی

نقاط برگشت را می‌یابیم (جایی که سرعت صفر است)

$$(1) \longrightarrow \dot{r} = 0 \longrightarrow \frac{2}{\mu}(E-U) - \frac{l^2}{\mu^2 r^2} = 0$$

حل کنیم: دو جواب $\longrightarrow \begin{cases} r_{min} \\ r_{max} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \text{اگر } U(r) \text{ شعاعی باشد} \longrightarrow \text{مسیر حرکت بسته است (بیضی)} \\ \text{〃 〃 〃 نباشد} \longrightarrow \text{〃 باز است} \end{cases}$

یک جواب: $r = r_{min} = r_{max}$ حرکت دایره‌ای

$$\Delta\theta = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{l/r^2\, dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - U - \frac{l^2}{2\mu r^2}\right)}}$$

if $\Delta\theta = 2\pi \frac{a}{b}$ → a, b اعداد صحیح باشند ⇒ مسیر بسته است

پتانسیل مؤثر

$$F_c = -\frac{dU_c}{dr} \;;\; U_c = \frac{l^2}{2\mu r^2} \Longrightarrow F_c = -\frac{l^2}{2\mu}(-2r^{-3}) = \frac{l^2}{\mu r^3}$$

F_c: نیروی گریز از مرکز

$$\left.\begin{array}{l} F_c = \dfrac{l^2}{\mu r^3} \\ l = \mu r^2 \dot{\theta} \end{array}\right\} \Rightarrow F_c = \frac{\mu^2 r^4 \dot{\theta}^2}{\mu r^3}$$

$\Longrightarrow F_c = \mu r \dot{\theta}^2$: به سرعت زاویه‌ای وابسته است

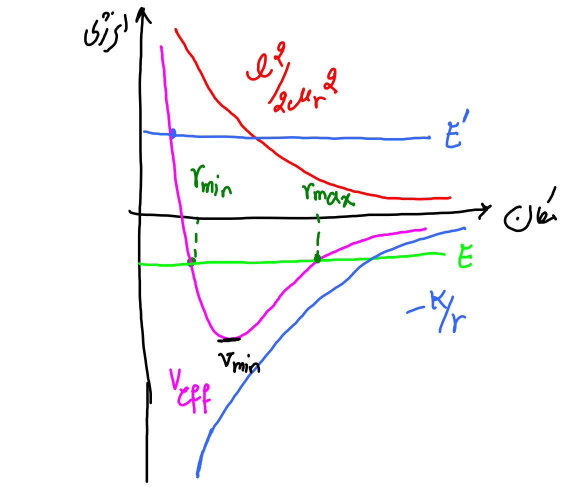
$$E - \underbrace{U - \frac{l^2}{2\mu r^2}} \longrightarrow V_{eff} = U + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} \Rightarrow U(r) = -\frac{k}{r}$$

$$V_{eff} = -\frac{k}{r} + \boxed{\frac{l^2}{2\mu r^2}}$$

I : گشتاور ماند

انرژی جنبشی دورانی : $\dfrac{L^2}{2I}$



$$E_{\text{کل}} = \underbrace{\frac{p^2}{2\mu}}_{\text{انرژی جنبشی انتقالی}} + \underbrace{\frac{L^2}{2I}}_{\text{جنبش دورانی}} + \overset{\text{پتانسیل}}{U(r)}$$

$$v=0 \Rightarrow p=0 \Rightarrow E_{\text{کل}} = \frac{L^2}{2I} + U = V_{eff}$$

نقاط برگشت

$$dV_{eff}/dr = 0 \Rightarrow +k/r^2 + \frac{l^2}{\cancel{2}\mu}(-\cancel{2})\,1/r^3 = 0 \rightarrow k/\cancel{r^2} = \frac{l^2}{\mu \cancel{r^3}_{\,r}} \Rightarrow r_0 = \frac{l^2}{\mu k}$$; نقطه تعادل پایدار

$$d^2V_{eff}/dr^2 = -2k/r^3 + \frac{3l^2}{\mu r^4}\Big|_{r_0} = -2k\left(\frac{\mu k}{l^2}\right)^3 + \frac{3l^2}{\mu}\left(\frac{\mu k}{l^2}\right)^4 = -2k^4\frac{\mu^3}{l^6} + \frac{3\cancel{l^2}}{\cancel{\mu}}\,\frac{\mu^{\cancel{4}\,3}k^4}{\cancel{l^8}_{\,l^6}}$$

$$= k^4\mu^3/l^6 > 0$$

حرکت سیاره‌ای

مسأله‌ها را تحت تأثیر نیروی مرکزی که متناسب با عکس مجذور فاصله بین ذره و مرکز نیرو است، بررسی می‌کنیم.

مسیر حرکت

$$\vec{F}(r) = -k/r^2\,\hat{r} \longrightarrow f(r) = -ku^2$$

$$u = 1/r$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{l^2}\frac{1}{u^2}F(u) \Rightarrow \boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2}} + u = -\mu/l^2\,\frac{1}{u^2}(-ku^2) = \boxed{\frac{\mu k}{l^2}}$$

معادله دیفرانسیل همگن : $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0 \Rightarrow$ جواب عمومی $= A\cos(\theta-\theta_0) = B\sin\theta + C\cos\theta$

از شرایط اولیه

معادله ناهمگن : $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = \dfrac{\mu k}{l^2} \rightarrow$ جواب خاص $= \dfrac{\mu k}{l^2}$

$$\Rightarrow u = A\cos(\theta-\theta_0) + \mu k/l^2 \;{}^{*} \Rightarrow r = \frac{1}{A\cos(\theta-\theta_0) + \mu k/l^2}$$: مسیر حرکت ذره

$$\Rightarrow r = \frac{1}{\underbrace{\mu k/l^2}_{1/\alpha}\left[\underbrace{\frac{Al^2}{\mu k}}_{\epsilon}\cos(\theta-\theta_0) + 1\right]} \Rightarrow r = \frac{\alpha}{\epsilon\cos\theta + 1} \Rightarrow \boxed{\alpha/r = \epsilon\cos\theta + 1}$$

θ_0: سمت‌گیری مدار $= 0$

معادله مقطع مخروطی که یکی از کانون‌های آن در مبدأ است.

انرژی مدار

$$E = \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] + \underbrace{U(u^{-1})}_{-ku} \qquad F(r) = -\frac{k}{r^2} \Rightarrow U(r) = -\frac{k}{r} = -ku$$

$$* \xrightarrow{\theta_0 = 0} \frac{du}{d\theta} = -A\sin\theta \Rightarrow E = \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu}\Big[A^2\sin^2\theta + \underbrace{\left(A\cos\theta + \frac{\mu k}{l^2}\right)^2}_{A^2\cos^2\theta + 2A\mu k\cos\theta/l^2 + \frac{\mu^2k^2}{l^4}}\Big] - k\left[A\cos\theta + \frac{\mu k}{l^2}\right]$$

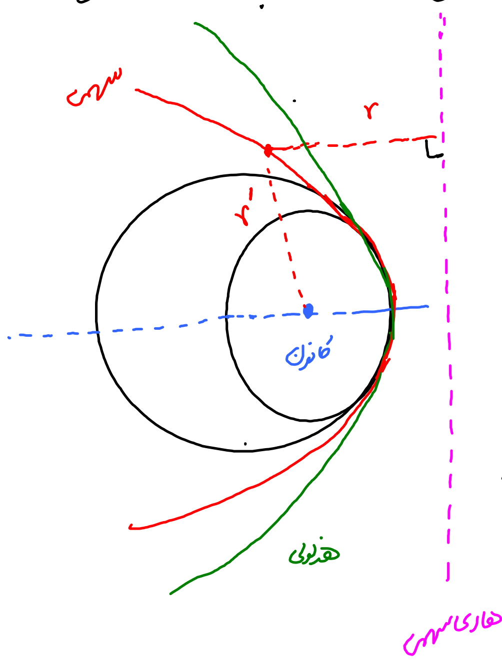
$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}A^2 l^2/\mu - \frac{\mu k^2}{2l^2} \Rightarrow A^2 = \frac{2\mu}{l^2}\left(E + \frac{\mu k^2}{2l^2}\right) = \frac{2\mu E}{l^2} + \frac{\mu^2 k^2}{l^4}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\mu k}{l^2}\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \Rightarrow \boxed{\epsilon = \frac{Al^2}{\mu k} = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}}$$: خروج از مرکز

$$\boxed{\alpha = \frac{l^2}{\mu k} \to 2\alpha}$$: وتر کانونی

مقاطع مخروطی

: از برخورد مخروط و یک صفحه به وجود می‌آیند. هر مقطع مخروطی از نقاطی تشکیل شده است که نسبت فاصله آنها از یک نقطه ثابت (کانون) به یک خط ثابت (خط هادی) مقدار ثابتی است.



برای سهمی : $r' = r$

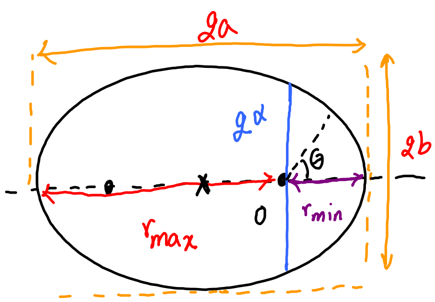
$E > 0 \,,\ \epsilon > 1$: هذلولی
$E = 0 \,,\ \epsilon = 1$: سهمی
} مدارهای باز

$V_{min} < E < 0 \,,\ 0 < \epsilon < 1$: بیضی
$E = V_{min} \,,\ \epsilon = 0$: دایره
} مدارهای بسته ← مدار حرکت سیارات به دور خورشید

$E < V_{min} \,,\ \epsilon < 0$: مدار غیرمجاز

$\epsilon_{earth} \simeq 0/017$

حرکت روی بیضی



$$\frac{\alpha}{r} = \epsilon\cos\theta + 1$$

نقاط اوج و حضیض ← نقاط برگشت

$$E = V_{eff} = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

$$\Rightarrow 2\mu E r^2 + 2\mu k r - l^2 = 0$$

$$r=\frac{-\mu k \mp \sqrt{\mu^2k^2+2\mu E l^2}}{2\mu E}=-\frac{k}{2E}\mp\frac{k}{2E}\underbrace{\sqrt{1+\frac{2El^2}{\mu k^2}}}_{\epsilon} \Rightarrow \begin{cases} r_{min}=\dfrac{k}{-2E}-\dfrac{k}{-2E}\epsilon \\ r_{max}=\dfrac{k}{-2E}+\dfrac{k}{-2E}\epsilon \end{cases}$$

از روی شکل

$$\rightarrow r_{min}+r_{max}=\frac{k}{-E}=2a \Rightarrow a=\frac{k}{2|E|}$$

(حرکت ذره مقید است) $-E>0 \leftarrow E<0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{r_{min}=a(1-\epsilon)} \quad (\mathrm{II}) \\ \boxed{r_{max}=a(1+\epsilon)} \end{cases}$$

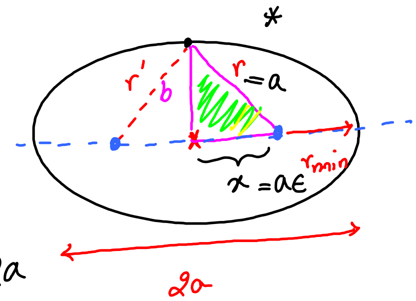
$$\theta=0 \rightarrow \frac{\alpha}{r_{min}}=\epsilon\cos(\theta=0)+1 \Rightarrow r_{min}=\frac{\alpha}{1+\epsilon} \quad (\mathrm{I})$$

(2α)

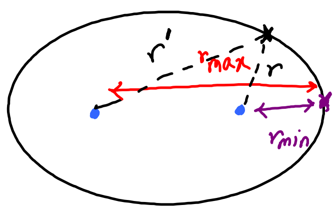
وتر کانونی: خطی که در کانون بیضی به قطر بزرگ بیضی عمود است.

$$\mathrm{I},\mathrm{II} \Rightarrow a(1-\epsilon)=\frac{\alpha}{1+\epsilon} \Rightarrow a=\frac{\alpha}{1-\epsilon^2}$$

$$r_{min}+x=a \xRightarrow{\mathrm{II}} (a-a\epsilon)+x=a \Rightarrow x=a\epsilon$$



طول نخ : $r'+r=2a$



$$r_{min}+r_{max}=2a$$

$r=a \Leftarrow 2r=2a \Leftarrow r=r'$ * در شکل

مثلث هاشور خورده :

$$\boxed{b=a\sqrt{1-\epsilon^2}} \Leftarrow b^2=a^2-a^2\epsilon^2 \Leftarrow a^2=b^2+x^2$$

$$a=\frac{\alpha}{1-\epsilon^2} \Rightarrow b=\frac{\alpha}{\sqrt{1-\epsilon^2}}=\frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}} \rightarrow b=\sqrt{\alpha a}$$

قانون سوم کپلر

مربع زمان تناوب چرخش سیارات به دور خورشید با مکعب نصف قطر بزرگ بیضی متناسب است:

$$\tau^2 \propto a^3$$

داشتیم : $\int_0^{\tau} dt=\int_0^{A}\frac{2\mu}{l}dA \Rightarrow \tau=\frac{2\mu}{l}A$, $A=\pi ab=\pi a\times a\sqrt{1-\epsilon^2}=\pi a^2\sqrt{1-\epsilon^2}$

$$\epsilon=\sqrt{1+\frac{2El^2}{\mu k^2}} \Rightarrow 1-\epsilon^2=\frac{2\overset{k/2a}{|E|}l^2}{\mu k^2}=\frac{l^2}{\mu k a}$$

$$a=\frac{k}{2|E|}$$

اگر $M \gg m$ جرم خورشید

جرم سیاره

$$\rightarrow \tau=\frac{2\mu}{l}\pi a^2\frac{l}{\sqrt{\mu k a}} \Rightarrow \boxed{\tau^2=\frac{4\pi^2}{k}\mu a^3}\ , \ \mu=\frac{mM}{m+M}=\frac{mM}{M}\simeq m$$

اگر $E = V_{min} \longrightarrow$ مدار دایره‌ای

پایداری مدارهای دایره‌ای

فرض کنید تحت تأثیر نیروی جاذبه مرکزی مقابل $\vec{F} = -k/r^n \, \hat{r}$ ، مدار دایره‌ای تشکیل شده باشد. آیا این مدار دایره‌ای پایدار است؟

$$F(r) = -k/r^n \Rightarrow U(r) = -\frac{k}{n-1}\frac{1}{r^{n-1}}$$

$$V_{eff} = \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{n-1}\frac{1}{r^{n-1}} \Rightarrow \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=\rho} = 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right|_{r=\rho} > 0$$: نقطه تعادل پایدار

$$\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=\rho} = \frac{k}{\rho^n} - \frac{l^2}{\mu\rho^3} = 0 \Rightarrow \rho^{n-3} = \frac{\mu k}{l^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right|_{r=\rho} = -\frac{nk}{\rho^{n+1}} + \frac{3l^2}{\mu\rho^4} \overset{\text{باید}}{>} 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\rho^4}}_{>0}\left[-\frac{nk}{\underbrace{\rho^{n-3}}_{\mu k/l^2}} + \frac{3l^2}{\mu}\right] > 0 \Rightarrow \frac{-n}{\mu}l^2 + \frac{3l^2}{\mu} > 0$$

$$\Rightarrow (3-n)\,l^2/\mu > 0 \Rightarrow 3-n > 0 \Rightarrow n<3$$