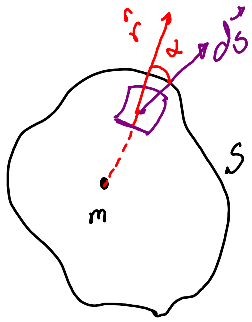
جلسه دوازدهم: معادله پواسون و سطوح هم پتانسیل   فصل هفتم: حرکت ذره در نیروی مرکزی   معادلات حرکت

قانون نیرو   انرژی‌های مدار   حرکت سیاره‌ای



مسائل فصل ۵: ۱ و ۳ و ۴ و ۵ و ۷ و ۸ و ۱۰-۱۶

معادله پواسون

جرم m داخل سطح S قرار گرفته است. شار گرانشی گذرنده از این سطح؟ Φ_m

نرمال صفحه ← $\hat n ds$

$$\Phi_e = \oint \vec E\cdot d\vec s \longrightarrow \Phi_m = \oint \vec g\cdot d\vec s \quad ; \quad \vec g = -\frac{Gm}{r^2}\hat r$$

میدان الکتریکی   میدان گرانشی

$$r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$\vec g\cdot\hat n = -\frac{Gm}{r^2}\,\hat r\cdot\hat n = -\frac{Gm}{r^2}\cos\theta \Longrightarrow \Phi_m = -Gm\oint \frac{1}{\cancel{r^2}}\cos\alpha\, ds$$

انتگرال را برای یک سطح کروی محاسبه می‌کنیم. می‌توان نشان داد که سطح گاوسی دلخواه بوده، می‌تواند هر شکلی داشته باشد.

برای سطح کروی: $\cos\alpha = 1$

$$\Phi_m = -Gm\int \frac{1}{\cancel{r^2}}\cancel{r^2}\, d\Omega = -4\pi G m$$

اگر n تا جرم m_1 تا m_n داخل سطح وجود داشته باشد:

$$\oint_S \vec g\cdot\hat n\, ds = -4\pi G\sum_{i=1}^{n} m_i$$

اگر توزیع جرمی پیوسته داخل سطح داشته باشیم:

$$\oint_S \vec g\cdot\hat n\, ds = -4\pi G\int_V \rho_m\, dV$$

حجمی که سطح S در بر گرفته ← V

$$\int_V \vec\nabla\cdot\vec g\, dV = -4\pi G\int_V \rho_m\, dV \Longrightarrow \vec\nabla\cdot\vec g = -4\pi G\rho_m \qquad \vec\nabla\cdot\vec E = \rho/\epsilon_0$$

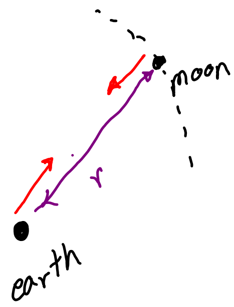
پتانسیل اسکالر

معادله پواسون

$$\vec g = -\vec\nabla\phi \Longrightarrow \vec\nabla\cdot(-\vec\nabla\phi) = -4\pi G\rho_m \Longrightarrow \nabla^2\phi = 4\pi G\rho_m \qquad \nabla^2\phi = \rho/\epsilon_0$$

$\downarrow \rho_m = 0$

$\nabla^2\phi = 0$: معادله لاپلاس



$$\vec F = \frac{-G m_e m_m}{r^2}\hat r \qquad f(r)$$

فصل هشتم: حرکت ذره تحت نیروی مرکزی

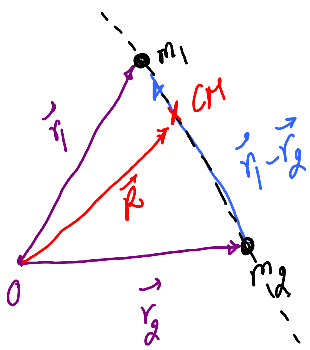
اگر $\vec F = f(r)\hat r$ ، نیروی $\vec F$ یک نیروی مرکزی است.

central force

$q \qquad \bar q$

$$U(r) = \frac{-\alpha}{r^2} + kr$$

سیستم های دو ذره ای



Center of mass

مرکز جرم : $M = m_1 + m_2$

محل مرکز جرم : $\vec r_{CM} = \dfrac{m_1\vec r_1 + m_2\vec r_2}{m_1+m_2} = \vec R$

در دستگاه مرکز جرم : $\vec R = 0 \Rightarrow m_1\vec r_1 + m_2\vec r_2 = 0$ (1)

مختصات نسبی : $\vec r = \vec r_1 - \vec r_2$ (2)

$$(2) \xrightarrow{\times m_1} m_1\vec r = m_1\vec r_1 - m_1\vec r_2$$
$$(1): \quad 0 = m_1\vec r_1 + m_2\vec r_2$$
$$\Rightarrow m_1\vec r = -m_1\vec r_2 - m_2\vec r_2 = -(m_1+m_2)\vec r_2$$
$$\Rightarrow \vec r_2 = \frac{-m_1}{m_1+m_2}\vec r^{\,*}, \quad \vec r_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec r^{\,*}$$

انرژی جنبشی

$$T = \tfrac12 m_1 v_1^2 + \tfrac12 m_2 v_2^2 = \tfrac12\left(m_1\dot{\vec r}_1^{\,2} + m_2\dot{\vec r}_2^{\,2}\right)$$

انرژی پتانسیل

$$U = -k/r = -\frac{k}{|\vec r_1 - \vec r_2|}$$

$$\text{انرژی کل} = E = T + U = \tfrac12\left(m_1\dot{\vec r}_1^{\,2} + m_2\dot{\vec r}_2^{\,2}\right) - \frac{k}{|\vec r_1 - \vec r_2|}$$

$\vec r_1$ و $\vec r_2$ را از روابط * و * جایگذاری می‌کنیم:

روابط * و *

$$E = \tfrac12 m_1\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2\dot{\vec r}^{\,2} + \tfrac12 m_2\left(\frac{-m_1}{m_1+m_2}\right)^2\dot{\vec r}^{\,2} - \frac{k}{|\vec r| = r}$$

$$E = \tfrac12\frac{1}{M^2}\underbrace{\left(m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2\right)}_{m_1 m_2(m_2 + \cancel{m_1})}\dot{\vec r}^{\,2} - \frac{k}{r} = \tfrac12\underbrace{\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}}_{\mu}\dot{\vec r}^{\,2} - \frac{k}{r}$$

reduced mass

جرم کاهش یافته

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$

$$\Rightarrow E = \tfrac12\mu\dot{\vec r}^{\,2} \underbrace{- k/r}_{U(r)}$$

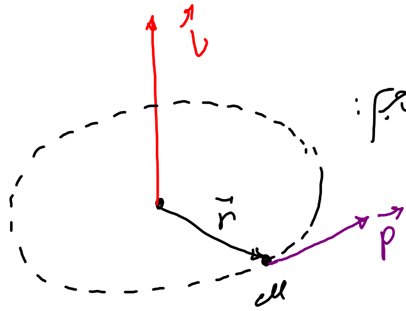
$\dot{\vec r}$: سرعت نسبی

که به جای آن که با دو ذره به جرم‌های m_1 و m_2 و سرعت‌های $\dot{\vec r}_1$ و $\dot{\vec r}_2$ کار کنیم،

می‌توانیم با دو ذره فرضی به جرم‌های μ و M و سرعت‌های $\dot{\vec r}$ و $\dot{\vec R}$ کار کنیم.

در دستگاه مرکز جرم $\dot{\vec R}=0$

فرض کنید ذره μ روی یک مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند حول مرکز جرم:



$$\vec l = \vec r \times \vec p$$

قانون دوم نیوتون:

$$\vec N = \frac{d\vec l}{dt} \quad \text{گشتاور } \vec N$$

$$\vec N = \vec r \times \vec F = r\hat r \times f(r)\hat r = 0$$

$$\Rightarrow d\vec l/dt = 0 \Rightarrow \boxed{\vec l = \text{ثابت}} \to$$ هم اندازه و هم جهت $\vec l$ ثابت است.

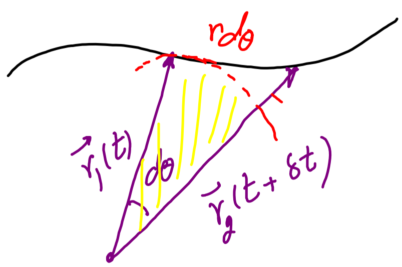
چون جهت $\vec l$ ثابت بوده و همیشه عمود بر صفحه $\vec r$, $\vec p$ است این حرکت ذره در نیروی مرکزی همیشه محدود به یک صفحه است

دستگاه قطبی

$$\vec v = \dot r\hat r + r\dot\theta\hat\theta \to \vec l = \underbrace{r\hat r \times \mu(\dot r\hat r}_{=0} + r\dot\theta\hat\theta) = \mu r^2\dot\theta\, \overbrace{\hat r \times \hat\theta}^{\hat z} \Rightarrow \vec l = \mu r^2\dot\theta\,\hat z$$

$$** \quad l = |\vec l| = |\mu r^2\dot\theta| = \text{ثابت}$$

تعبیر هندسی $l =$ ثابت



ارتفاع مثلث

$$\text{مساحت مثلث کوچک} = \frac{1}{2} r(rd\theta) = dA$$

قاعده مثلث

$$\Rightarrow dA/dt = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot\theta \overset{**}{=} \frac{1}{2}\frac{l}{\mu} = \text{ثابت}$$

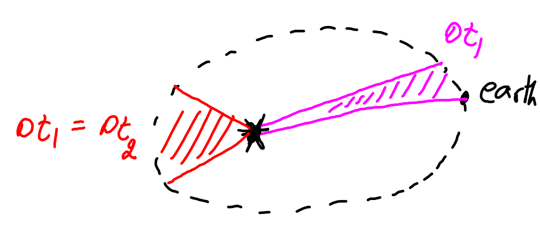
$$\Rightarrow \int_0^\tau \frac{dA}{dt}dt = \int_0^\tau \frac{l}{2\mu}dt \Rightarrow \boxed{A = \frac{l}{2\mu}\tau}$$

$$A_1 = \frac{l}{2\mu}\Delta t_1 \;,\; A_2 = \frac{l}{2\mu}\Delta t_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}$$

اگر $\Delta t_1 = \Delta t_2 \Rightarrow A_1 = A_2$

سطح جاروب شده توسط بردار شعاعی زمین تا خورشید در زمان‌های مساوی، یکسان است

قانون دوم کپلر



معادله حرکت

$$E = T+U = \text{ثابت} = \frac{1}{2}\mu \dot{\vec{r}}^2 + U(r) = \frac{1}{2}\mu \dot r^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\dot\theta^2 + U(r)$$

$$\vec v = \dot r\hat r + r\dot\theta\hat\theta \Rightarrow v^2 = \dot r^2 + r^2\dot\theta^2 \qquad l = \mu r^2\dot\theta \Rightarrow \dot\theta = \frac{l}{\mu r^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\mu\dot r^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r) = \text{ثابت}$$

$$\Rightarrow \dot r = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E-U) - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}} \Rightarrow r(t) = \dots$$

مسیر حرکت $\leftarrow$ t را در رابطه بالا باید حذف کنیم.

روش اول

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot\theta = \frac{dr}{d\theta}\frac{l}{\mu r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{d\theta}\frac{l}{\mu r^2} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E-U) - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}} \Rightarrow \frac{d\theta}{dr} = \frac{l}{\mu r^2}\left(\sqrt{\dots}\right)^{-1}$$

$$\rightarrow \theta = \int \frac{l\,dr}{r^2\sqrt{2\mu\left[E-U-\frac{l^2}{2\mu r^2}\right]}} \Rightarrow \theta = \theta(r) \quad : \text{مسیر حرکت مداری}$$

روش دوم

شتاب در مختصات قطبی: $\vec a = (\ddot r - r\dot\theta^2)\hat r + (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta)\hat\theta \qquad F(r)\hat r = \vec F = \mu\vec a$

$$\Rightarrow \mu(\ddot r - r\dot\theta^2) = -\frac{dU}{dr} \rightsquigarrow$$ برحسب متغیر u می‌نویسیم

تغییر متغیر: $u \equiv \frac{1}{r} \;\downarrow\; \frac{du}{dr} = -\frac{1}{r^2}$

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{du}{dr}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\underbrace{\frac{dr}{dt}}_{\dot r}\underbrace{\frac{dt}{d\theta}}_{1/\dot\theta}$$

$$\rightarrow \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\dot r \times \frac{\mu r^2}{l} \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = -\frac{\mu}{l}\dot r \quad (I)$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{\mu}{l}\dot r\right) = \underbrace{\frac{dt}{d\theta}}_{1/\dot\theta}\frac{d}{dt}\left(-\frac{\mu}{l}\dot r\right) = \frac{\mu r^2}{l}\times\frac{-\mu}{l}\ddot r = -\frac{\mu^2}{l^2}\underbrace{r^2}_{1/u^2}\ddot r$$

$$\rightarrow \ddot{r} = -\frac{l^2 u^2}{\mu^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{dU}{dr} \Longrightarrow \mu\left(\frac{-l^2u^2}{\mu^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{1}{u}\left(\frac{l}{\mu \underset{1/u^2}{r^2}}\right)^2\right) = -\frac{dU}{dr} = F(r)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{-\mu}{l^2u^2}F(u^{-1})}$$ معادله دیفرانسیل مسیر حرکت

انرژی های مدار

$$E = T + U(r) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r)$$

تغییر متغیر $u = 1/r$ را اعمال می کنیم :

$$I \rightarrow \dot{r} = -\frac{l}{\mu}\frac{du}{d\theta} \qquad \frac{l^2}{2\mu r^2} = \frac{l^2}{2\mu}u^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}\mu\frac{l^2}{\mu^2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{l^2u^2}{2\mu} + U(u^{-1})}$$

مثال : قانون نیرو را برای یک نیروی مرکزی که اجازه می دهد ذره ای در یک مدار مارپیچ لگاریتمی به معادله $r = ke^{\alpha\theta}$ حرکت کند

را بیابید. k و α ضرایب ثابت هستند. $r(t)$ و $\theta(t)$ را تعیین کنید. انرژی مدار را نیز بیابید.

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{-\mu}{l^2u^2}F(u^{-1})$$

$$r = ke^{\alpha\theta} = \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{k}e^{-\alpha\theta}$$

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{\alpha}{k}e^{-\alpha\theta} \rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{\alpha^2}{k}e^{-\alpha\theta} \rightarrow \underbrace{\frac{\alpha^2}{k}e^{-\alpha\theta} + \frac{1}{k}e^{-\alpha\theta}}_{\underset{u}{\frac{1}{k}e^{-\alpha\theta}}(\alpha^2+1)} = \frac{-\mu}{l^2u^2}F(u^{-1})$$

$$\Longrightarrow u(\alpha^2+1) = \frac{-\mu}{l^2u^2}F(u^{-1})$$

$$\Longrightarrow F = \frac{-l^2}{\mu}u^3(\alpha^2+1) \longrightarrow F(r) = \frac{-l^2}{\mu r^3}(\alpha^2+1)$$

ب -

$$\dot{\theta} \overset{d\theta/dt}{=} \frac{l}{\mu r^2} = \frac{l}{\mu k^2 e^{2\alpha\theta}} = \frac{l}{\mu k^2}e^{-2\alpha\theta}$$

$$\rightarrow \quad e^{2\alpha\theta} d\theta = \frac{l}{\mu k^2} dt \Rightarrow \frac{1}{2\alpha} e^{2\alpha\theta} = \frac{l}{\mu k^2} t + C$$

$\ln$

$$\rightarrow \ln e^{2\alpha\theta} = \ln\left(\frac{2\alpha l}{\mu k^2} t + c'\right) \Rightarrow \theta(t) = \frac{1}{2\alpha} \ln\left(\frac{2\alpha l}{\mu k^2} t + c'\right)$$

$$r = k e^{\alpha\theta} \Rightarrow r^2 = k^2 e^{2\alpha\theta} = k^2 \exp\left\{\ln\left(\frac{2\alpha l}{\mu k^2} t + c'\right)\right\} = k^2\left(\frac{2\alpha l}{\mu k^2} t + c'\right)$$

$$\Rightarrow r(t) = \sqrt{\frac{2\alpha l}{\mu} t + k^2 c'}$$

$$E = \frac{l^2}{2\mu}\left(du/d\theta\right)^2 + \frac{l^2 u^2}{2\mu} + U(u^{-1}) \quad -C$$

$$U(r) = -\int F\, dr = \frac{l^2}{\mu}(\alpha^2+1)\int 1/r^3\, dr = -\frac{l^2(\alpha^2+1)}{2\mu r^2} = -\frac{l^2(\alpha^2+1)}{2\mu} u^2$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu}\left\{\left(-\alpha/k\, e^{-\alpha\theta}\right)^2 + \left(1/k\, e^{-\alpha\theta}\right)^2\right\} + -\frac{l^2(\alpha^2+1)}{2\mu k^2} e^{-2\alpha\theta} = 0$$

$$(\alpha^2+1)/k^2 \; e^{-2\alpha\theta}$$