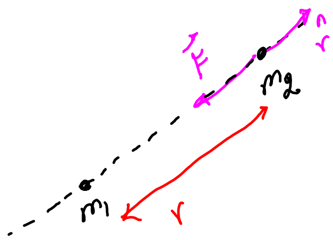
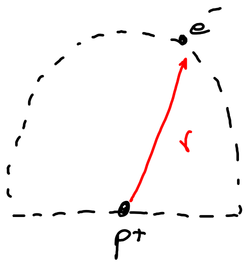
قانون عمومی گرانش



$$\boxed{\vec{F}} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r} = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}$$

ثابت عمومی گرانش

$$G = 6{,}67726 \mp 0{,}0005 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$$



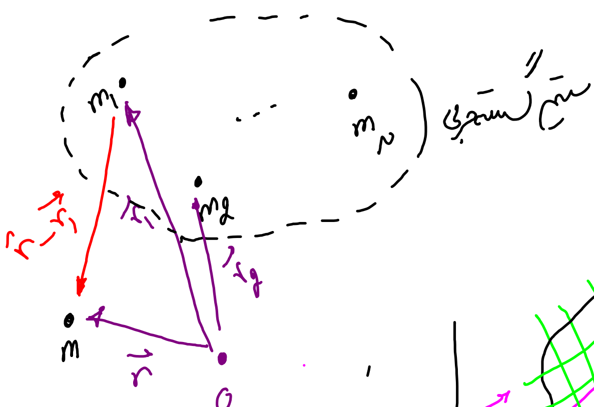
$$\left.\begin{aligned} \frac{mv^2}{r} &= k\frac{ee}{r^2} \\ mvr = n\hbar &\longrightarrow v = \frac{n\hbar}{mr} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cancel{m}\times\frac{n^2\hbar^2}{m^2 \cancel{r^3}\,r} = \frac{e^2}{\cancel{r^2}}$$

$\underset{k=1}{}$

$$\Rightarrow r = \frac{n^2\hbar^2}{me^2} \underset{n=1}{=} a_0 \quad \text{شعاع بوهر} \quad \simeq 0{,}5\ A^\circ$$

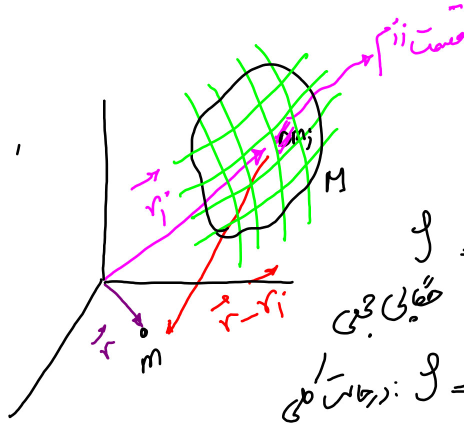
همین سؤال: $\frac{m_e v^2}{r} = G\frac{m_e m_p}{r^2} \Longrightarrow r = 10^{13}\ L.y$

الف- اگر اجسام بصورت گسسته باشند.



جمع برداری: $\vec{F} = -\sum_{i=1} \frac{Gmm_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)$

ب- توزیع جرمی پیوسته باشد:



جرم M به N قسمت تقسیم می‌شود. $\Delta m_i = \frac{M}{N}$

چگالی حجمی $\rho = \frac{m}{V}$

در حالت کلی: $\rho = \frac{dm}{dV} \longrightarrow \underset{\smile}{dm} = \rho\, dV$ حجم المان

$$\Longrightarrow \vec{F} = -Gm\sum\frac{\Delta m_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

تعداد تکه را زیاد و اندازه آنها را کوچک می‌کنیم: جرم المان

$N \to \infty$

$\Delta m \to dm$

$\sum \to \int$

$\big\downarrow N\to\infty$

$\rho\, dV'$ → حجم المان

$$\vec{F} = -Gm\int\frac{dm}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

مکان المان

میدان گرانشی $\vec{g}$ (جرم M) در هر نقطه: نیروی وارد بر واحد جرم در یک نقطه که در میدان جرم M است.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\int \rho(\vec{r}')\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV' \longrightarrow m/s^2$$

پتانسیل گرانشی: کار انجام شده برای آوردن واحد جرم از نقطه ∞ به فاصله r از جرم M

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \quad \equiv \quad \vec{g} = -\vec{\nabla}\varphi$$

انرژی پتانسیل گرانشی — پتانسیل گرانشی

$$\vec{F} = m\vec{g} = -\vec{\nabla} U \Rightarrow \vec{g} = -\vec{\nabla}\left(\frac{U}{m}\right) = -\vec{\nabla}\varphi \qquad U = m\varphi$$

انرژی پتانسیل — پتانسیل

اگر ذره M نقطه‌ای باشد:

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r} \Rightarrow \vec{g} = -GM/r^2\,\hat{r} = -\vec{\nabla}\varphi = -\frac{d\varphi}{dr}\hat{r}$$

$$\Rightarrow GM/r^2 = \frac{d\varphi}{dr} \Rightarrow \varphi = -\frac{GM}{r}$$

اگر M توزیع جرمی داشته باشد:

توزیع خطی: $dm = \lambda\, dl'$ (چگالی خطی؛ المان خط)

$$\Rightarrow \varphi(r) = -G\int_C \frac{\lambda\, dl'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \quad ; \quad \lambda = \lambda(\vec{r}\,')$$

$\vec{r}$: مکانی که پتانسیل در آن مدنظر است. — $\vec{r}\,'$: مکان المان

* لزومی ندارد چگالی‌ها ثابت باشند.

توزیع سطحی: $dm = \sigma\, dA'$ (چگالی سطحی)

$$\Rightarrow \varphi(r) = -G\int_A \frac{\sigma\, dA'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \quad ; \quad \sigma = \sigma(\vec{r}\,')$$

توزیع حجمی: $dm = \rho\, dV'$

$$\Rightarrow \varphi(r) = -G\int_V \frac{\rho\, dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \quad ; \quad \rho = \rho(\vec{r}\,')$$

مثال ۱: نیروی گرانشی بین یک پوسته کروی نازک یکنواخت به جرم M و یک ذره به جرم m را که در فاصله r از مرکز پوسته قرار گرفته است، بیابید. شعاع پوسته کروی را R بگیرید.

توزیع سطحی — چگالی ثابت

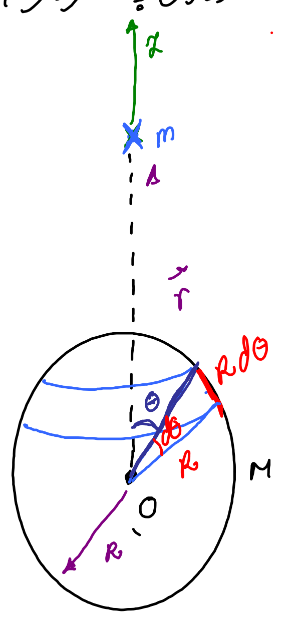
(دستگاه کروی) $dA = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$

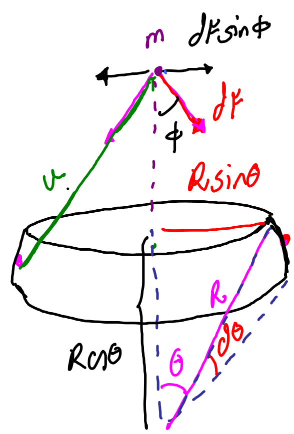
$\vec{r}$: مکانی که در آن نیرو حساب می‌شود.

$\vec{r}\,'$: مکان المان

جرم المان: dM

$dM = \sigma\, dA$





ضخامت نوار: $Rd\theta$

مساحت نوار: dA

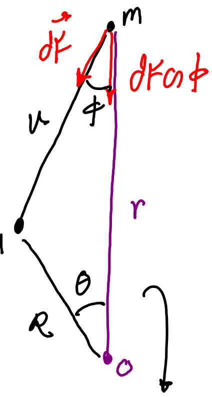
$$\underbrace{dM}_{\text{جرم نوار}} = \sigma \times \underbrace{(Rd\theta)}_{\text{ضخامت نوار}}\underbrace{(2\pi R\sin\theta)}_{\text{طول نوار}}$$

$$\Rightarrow dM = 2\pi\sigma R^2 \sin\theta\, d\theta$$

نیروهای وارد بر m از طرف نوار دارای دو مؤلفه هستند که مؤلفه‌های $dF\sin\phi$ خنثی می‌شوند. پس برآیند نیروها در جهت $z-$ است.

dF: نیرویی که از طرف نوار به جرم m وارد می‌شود.

$$dF = -Gm\frac{dM}{(\text{فاصله المان تا نقطه مورد نظر})^2} \qquad (\text{فاصله المان تا نقطه مورد نظر})^2 = u^2$$



$$u^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta \quad *$$

جهت نیروی $d\vec{F}$ در شکل نشان داده شده است. باید روی $d\vec{F}$ انتگرال بگیریم.

برای سادگی چون $dF\sin\phi$ ها خنثی می‌شوند، فقط احتیاج است روی $dF\cos\phi$ انتگرال بگیریم.

$$dF \to dF\cos\phi$$
$$dF \to dF\sin\phi \to \text{خنثی}$$

$$R^2 = r^2 + u^2 - 2ru\cos\phi \;\Downarrow\; \cos\phi = \frac{u^2+r^2-R^2}{2ur}$$

$$\to F = \int dF\cos\phi = -Gm\int\frac{2\pi\sigma R^2\sin\theta\,d\theta}{u^2 = r^2+R^2-2rR\cos\theta}\cos\phi$$

توجه کنید u و θ از هم مستقل نیستند

$$*:\; 2u\,du = +2rR\sin\theta\,d\theta \to \sin\theta\,d\theta = \frac{u\,du}{rR}$$

$$\to F = -Gm\times 2\pi\sigma R^2\int\frac{\cancel{u}\,du}{rR}\,\frac{1}{u^2}\,\frac{u^2+r^2-R^2}{2\cancel{u}r}$$

$$\to F = -Gm\times 2\pi\sigma R^2\times\frac{1}{2r^2R}\int_{r-R}^{r+R} du\left[1+\frac{r^2-R^2}{u^2}\right]$$

$r-R$: موقعیت المان بالای کره است.

$r+R$: « پایین کره » است

$$\to F = -Gm\frac{\pi R}{r^2}\sigma\left[u - \frac{(r^2-R^2)}{u}\right]_{r-R}^{r+R}$$

$$= -Gm\frac{\pi R}{r^2}\sigma\left[r+R-(r-R) - \frac{\overset{(r-R)}{\cancel{(r^2-R^2)}}}{\cancel{r+R}} + \frac{\overset{(r+R)}{\cancel{(r^2-R^2)}}}{\cancel{r-R}}\right] = -Gm\frac{\pi R\sigma}{r^2}\times 4R$$

$$\to F = -Gm\frac{4\pi R^2\sigma}{r^2} \quad M \qquad \to F = -GmM/r^2$$

همگن → ثابت $= \rho$

مثال ۲: پتانسیل گرانشی بیرون و داخل یک پوسته کروی به شعاع داخلی b و شعاع خارجی a چقدر است؟

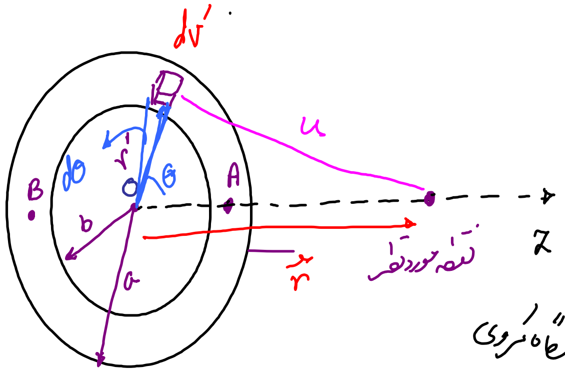
فضای المان

$$\Phi(\vec r) = -G\int \frac{\rho(r')}{\underbrace{|\vec r - \vec r'|}_{u}}\, \underbrace{dv'}_{\text{المان حجم}}$$

$u = |\vec r - \vec r'|$

فاصله نقطه مورد نظر تا المان

المان حجم



المان حجم در دستگاه کروی: $dv' = r'^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr'$

$$\Phi = -G\rho\int \frac{r'^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr'}{u}$$

$$u^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta \Rightarrow 2u\,du = +2rr'\sin\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow \sin\theta\, d\theta = \frac{u\,du}{rr'}$$

$$\Rightarrow \Phi = -G\rho\int \cancel{r'^2}^{\,r'} dr' \frac{u\,du}{r\cancel{r'}} \times \frac{1}{u} \underbrace{\int^{2\pi} d\phi}_{2\pi}$$

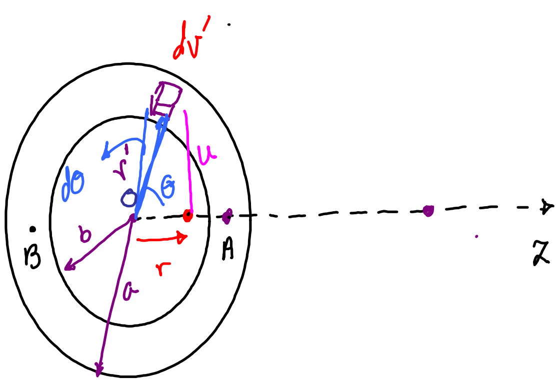
$$\Rightarrow \Phi = -\frac{G\rho}{r}\int r'dr' \int_{A = r-r'}^{B = r+r'} du \times 2\pi = -\frac{G\rho}{r} \times 2\pi \int r'dr' \overbrace{(r+r'-r+r')}^{2r'}$$

M: جرم پوسته

$$\Phi = -G\rho \frac{2\pi}{r} \times 2\int_b^a r'^2 dr' = -\frac{4\pi G\rho}{r} \times \frac{1}{3}(-b^3+a^3) = -\frac{G}{r}\rho\, \frac{4\pi}{3}(-b^3+a^3)$$

$$r > a: \quad \Phi(r) = -\frac{GM}{r}$$

اگر نقطه مورد نظر در $r < b$ باشد.



$$\Phi = -\frac{G\rho}{r} 2\pi \int r'dr' \int_{r'-r}^{r'+r} du$$

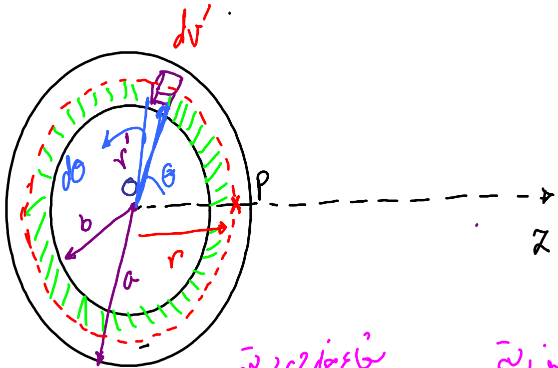
$A: r' - r = u$

$B: r' + r = u$

$$\Rightarrow \Phi = -2\pi G\frac{\rho}{r}\int r'dr' \underbrace{(r'+r-r'+r)}_{2r} = -2\pi G\frac{\rho}{\cancel{r}} \times 2\cancel{r} \underbrace{\int_b^a r'dr'}_{\frac{1}{2}r'^2 = \frac{1}{2}(a^2-b^2)}$$

$$\Rightarrow \Phi = -2\pi G\rho(a^2-b^2) = \text{ثابت} \qquad (r < b)$$

اگر نقطه مورد نظر بین a و b باشد



در این حالت، نقطه P بیرون پوسته کروی هاشور خورده است.

" " " درون " " بدون هاشور است.

شعاع خارجی پوسته

شعاع داخلی پوسته

$$\underset{\text{بیرون پوسته}}{\varphi(P)} = -\frac{4}{3}\pi\rho G\,(a^3-b^3)/r \xrightarrow[a\to r]{b\to b} \varphi = -\frac{4}{3}\pi\rho G\,(r^3-b^3)/r$$

$$\underset{\text{داخل پوسته}}{\varphi(P)} = -2\pi\rho G(a^2-b^2) \xrightarrow[b\to r]{a\to a} \varphi = -2\pi\rho G(a^2-r^2)$$

$$\Rightarrow \underset{b<r<a}{\varphi(P)} = -\frac{4}{3}\pi\rho G(r^3-b^3)/r - 2\pi\rho G\,(a^2-r^2)$$

$$= -4\pi\rho G\left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^3}{3r} - \frac{r^2}{6}\right) \xrightarrow{r=a} \varphi(r=a) = \alpha\left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^3}{3a} - \frac{a^2}{6}\right)$$

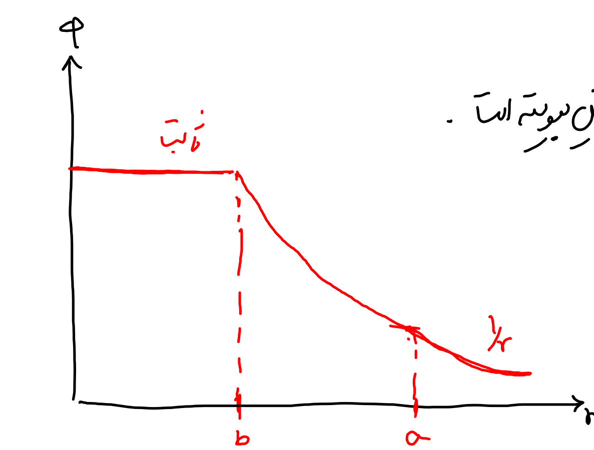
$$\Rightarrow \varphi(r=a) = -4\pi\rho G\,\frac{1}{3a}\left(-b^3 - \frac{a^3}{2} + \frac{3a^3}{2}\right) = \frac{-4\pi\rho G}{3a}(a^3-b^3)$$

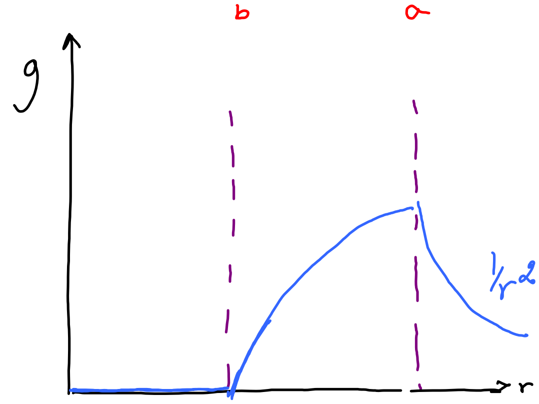
$$\varphi(r=b) = -2\pi\rho G\,(a^2-b^2)$$

میدان گرانشی : $g = -\dfrac{d\varphi}{dr}$

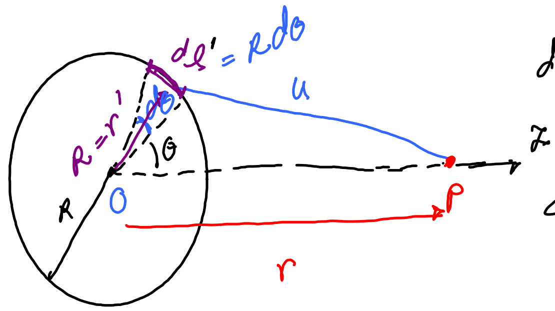
$$\rightarrow g = \begin{cases} 0 & r<b \\ \dfrac{4\pi G\rho}{3}\left(\dfrac{b^3}{r^2} - r\right) & b<r<a \\ -GM/r^2 & r>a \end{cases}$$

پتانسیل پوسته است.





مثال ۳: پتانسیل گرانشی ناشی از یک حلقه نازک (همگن) به شعاع R و جرم M برای نقطه‌ای خارج از حلقه و در صفحه حلقه را بیابید.
$r \gg R$



$dm' = \lambda\, dl'$

$$\varphi = -G\int \frac{dm'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

۱- دستگاه مختصات

۲- فاصله نقطه P تا مبدأ دستگاه $= r$

۳- مشخص المان $\leftarrow dm'$

۴- فاصله المان تا مبدأ دستگاه $= r'$

۵- فاصله المان تا نقطه P $= u$

۶- گذاشتن در فرمول

$$\varphi = -G\int \frac{\lambda R\, d\theta}{u} = -G\lambda R\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left[r^2+R^2-2rR\cos\theta\right]^{1/2}}$$

$$u^2 = r^2+R^2-2rR\cos\theta$$

$$\Longrightarrow \varphi = -G\lambda R\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{r\left[1+\underbrace{(R/r)^2-2(R/r)\cos\theta}_{\epsilon}\right]^{1/2}}$$

$r \gg R \Longrightarrow (R/r) \ll 1$

بسط تیلور: $(1+\epsilon)^{-1/2} \simeq 1-\frac{1}{2}\epsilon+\frac{3}{8}\epsilon^2-\frac{5}{16}\epsilon^3+\cdots$

$4(R/r)^2\cos^2\theta$

$$\left[1+(R/r)^2-2(R/r)\cos\theta\right]^{-1/2} = 1-\frac{1}{2}\left\{(R/r)^2-2(R/r)\cos\theta\right\}+\frac{3}{8}\left\{(R/r)^2-2(R/r)\cos\theta\right\}^2+\cdots$$

از توان‌های $(R/r)^3$ و بالاتر صرف‌نظر می‌کنیم

$$=1+(R/r)\cos\theta+(R/r)^2\left\{-\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\times 4\cos^2\theta\right\}+\cdots$$

$$=1+(R/r)\cos\theta+\frac{1}{2}(R/r)^2\left(3\cos^2\theta-1\right)$$

$\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$

$$\int \cos^2\theta\, d\theta = \theta/2+\frac{1}{4}\sin 2\theta$$

$$\Longrightarrow \varphi = \frac{-G\lambda R}{r}\int_0^{2\pi}\left\{1+(R/r)\cos\theta+\frac{1}{2}(R/r)^2\left(3\cos^2\theta-1\right)+\cdots\right\}d\theta$$

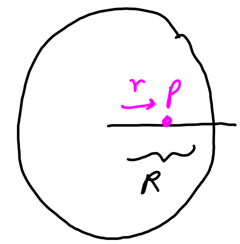
$$\Longrightarrow \varphi = -G\lambda R/r\left(2\pi+\underbrace{(R/r)\sin\theta\Big|_0^{2\pi}}_{0}+\frac{1}{2}(R/r)^2\,3\left(\theta/2+\underbrace{\frac{1}{4}\sin 2\theta}_{0}\right)\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2}(R/r)^2\times 2\pi\right)$$

$$\Longrightarrow \varphi = -G\lambda R/r\times 2\pi\left\{1+\frac{3}{4}(R/r)^2-\frac{1}{2}(R/r)^2\right\} = -\frac{2\pi G\lambda R}{r}\left(1+\frac{1}{4}(R/r)^2+\cdots\right)$$

$2\pi\lambda R = M$: جرم حلقه $\Longrightarrow \Phi = -\frac{GM}{r}\left(1 + \frac{1}{4}\left(\frac{R}{r}\right)^2 + \cdots\right)$

اگر بتوان از $\left(\frac{R}{r}\right)^2$ صرف‌نظر کرد، مسأله بصورت نقطه‌ای می‌شود.

مثال ۴: همان مثال ۳ را برای حالتی که نقطه r داخل دایره است حل کنید. $r \ll R$ (حلقه بسیار بزرگ)



$$\frac{r}{R} \ll 1 \longrightarrow \Phi(r) = -G\lambda R \int_0^{2\pi} \frac{1}{R\left[1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{R}\right)\cos\theta\right]^{1/2}}$$

$$\left[1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{R}\right)\cos\theta\right]^{-1/2} = \cdots$$

$$\Phi(r) = -\frac{2\pi\lambda G R}{R}\left\{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \cdots\right\} \Longrightarrow \Phi(r) = -\frac{GM}{R}\left\{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \cdots\right\}$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = 0 \longrightarrow r_{\text{تعادل}} = 0 \longrightarrow \frac{d^2\Phi}{dr^2} = -\frac{MG}{2R^3} + \cdots < 0$$

نقطه $r=0$ نقطه تعادل ناپایدار است.