جلسه هفتم

دامنه همبستگی و رابطه عدم قطعیت انرژی ـ زمان   تصویر شرودینگر و هایزنبرگ ـ کت‌های حالت

معادله حرکت هایزنبرگ   قضیه ارنفست   کت‌های پایه و دامنه گذار   مثال هده پذیرها

دامنه همبستگی و رابطه عدم قطعیت $\Delta E \Delta t$

$$U(t,t_0) = \exp(-iHt/\hbar)$$

$$|\alpha, t_0, t\rangle = U(t,t_0)|\alpha, t_0\rangle \qquad |\alpha, t_0, t\rangle = |\alpha, t\rangle \quad , |\alpha, t_0=0\rangle = |\alpha\rangle$$

دامنه همبستگی : $C(t) = \langle\alpha|\alpha, t\rangle = \langle\alpha|U(t,0)|\alpha\rangle$ $H|a'\rangle = E_{a'}|a'\rangle$

الف) $|\alpha\rangle = |a'\rangle \implies C(t) = \langle a'|\underbrace{U(t,0)}_{e^{-iHt/\hbar}}|a'\rangle = \langle a'|e^{-iE_{a'}t/\hbar}|a'\rangle = e^{-iE_{a'}t/\hbar}$

$$\implies |C(t)|^2 = 1$$

ب) $|\alpha\rangle = \sum C_{a'}|a'\rangle \implies C(t) = \underbrace{\sum_{a'} C^*_{a'}\langle a'|}_{\langle\alpha|} U(t,0) \underbrace{\sum_{a''} C_{a''}|a''\rangle}_{|\alpha\rangle}$

$$= \sum_{a',a''} C^*_{a'} C_{a''} \langle a'|e^{-iE_{a''}t/\hbar}|a''\rangle = \sum_{a'} |C_{a'}|^2 e^{-iE_{a'}t/\hbar}$$

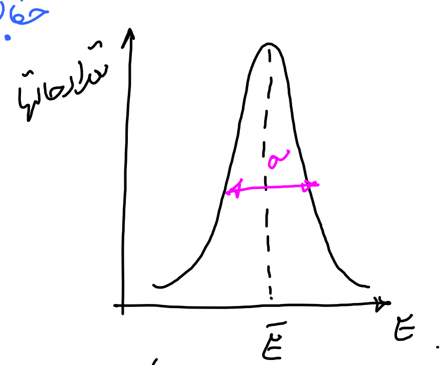
$\langle a'|a''\rangle = \delta_{a'a''}$

انتظار داریم $C(t)$ با گذشت زمان کوچک شود یعنی این که در زمانهای بزرگ، احتمال یافتن سیستم در حالت اولیه اش کم می‌شود.

$$\sum_{a'} \longrightarrow \int dE\, \rho(E)$$

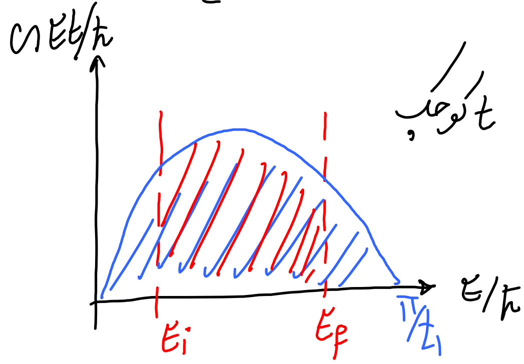
چگالی حالتها

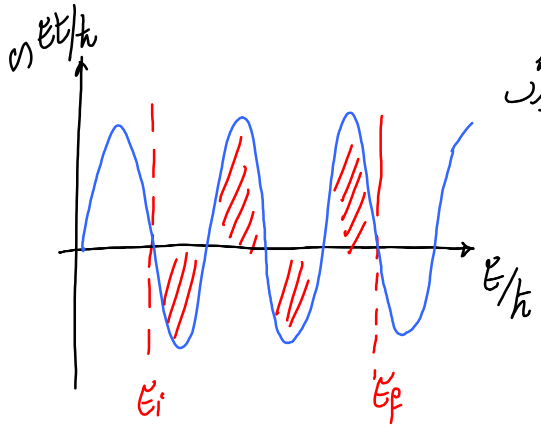
تعداد حالتهایی که انرژی آنها بین E و $E+dE$ است.



$$C(t) = \int_{E_i}^{E_f} dE\, \rho(E)\, |g(E)|^2 e^{-iEt/\hbar}$$

جمله $\cos Et/\hbar$ را در نظر بگیریم





t بزرگ

تا چه زمانی باید صبر کنیم تا $C(t)$ برابر صفر شود؟

$$C(t) = e^{-i\bar{E}t/\hbar}\int_{E_i}^{E_f} dE\, f(E)\,|g(E)|^2\, e^{-i(E-\bar{E})t/\hbar}$$

$$-|E-\bar{E}|\,t/\hbar = -1 \Longrightarrow t_0 = \frac{\hbar}{|E-\bar{E}|}$$: زمان مشخصه

$E-\bar{E} = \Delta E$

اگر $t < t_0$: سیستم هنوز در حالت اولیه خود قابل یافت شدن است.

اگر $t > t_0$: تقریباً ارتباطی بین حالت‌های اولیه و نهایی وجود ندارد.

$\Delta E \cdot t \sim \hbar$ *

معنی رابطه * : باید به اندازه زمان Δt در سیستم صبر کرد ($\Delta t \sim \frac{\hbar}{\Delta E}$) تا سیستم در حالت اولیه خود یافت نشود.

پهنای انرژی سیستم

تصویر شرودینگر و هایزنبرگ

$$|\alpha,t_0,t\rangle = U|\alpha,t_0\rangle$$

$$HU = i\hbar\frac{\partial U}{\partial t}$$

$$H|\alpha,t\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha,t\rangle$$

تصویر شرودینگر : $X \to X$

$|\alpha\rangle \to U|\alpha\rangle$

تصویر هایزنبرگ : $|\alpha\rangle \to |\alpha\rangle$

$X \to U^\dagger X U$

$$\langle\beta|X|\alpha\rangle \xrightarrow{\text{تصویر شرودینگر}} \langle\beta|\overbrace{U^\dagger X U}^{X^{(H)}}|\alpha\rangle$$

مثال:

$$U = T(d\vec{x}') = 1 - \frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot d\vec{x}'$$

با استفاده از دو روش شرودینگر و هایزنبرگ : $\langle x\rangle = \langle\alpha|x|\alpha\rangle$ را به دست آورید.

تصویر شرودینگر : $|\alpha\rangle \to T|\alpha\rangle = \int \underbrace{T(d\vec{x}')\,|\vec{x}'\rangle}_{|\vec{x}'+d\vec{x}'\rangle}\langle\vec{x}'|\alpha\rangle\, d^3x'$

$$\Rightarrow \langle x\rangle = \langle\alpha|x|\alpha\rangle \longrightarrow \langle\alpha|\underbrace{T^{\dagger}}_{\mathbb{1}}x\underbrace{T}_{\mathbb{1}}|\alpha\rangle = \int d^3x'd^3x''\langle\alpha|x'\rangle\underbrace{\langle x'|T^{\dagger}}_{\langle x'+dx'|}x\underbrace{T|x''\rangle}_{|x''+dx'\rangle}\langle x''|\alpha\rangle$$

$$T|x'\rangle = |x'+dx'\rangle \longrightarrow \langle x'|T^{\dagger} = \langle x'+dx'|$$

$$= \int d^3x'd^3x''\langle\alpha|x'\rangle\langle x'+dx'|\underbrace{x|x''+dx'\rangle}_{(x''+dx')|x''+dx'\rangle}\langle x''|\alpha\rangle$$

$$= \int d^3x'd^3x''(x''+dx')\langle\alpha|x'\rangle\delta(x'-x'')\langle x''|\alpha\rangle = \int d^3x'(x'+dx')\langle\alpha|x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle$$

$$= \underbrace{\int d^3x'\, x'\overbrace{\langle\alpha|x'\rangle}^{\psi^*_\alpha(x')}\overbrace{\langle x'|\alpha\rangle}^{\psi_\alpha(x')}}_{\langle x\rangle} + \int d^3x'(dx')\langle\alpha|x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle = \langle x\rangle + \langle dx'\rangle$$

تعبیر هایزنبرگ : $|\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha\rangle$

$$x \longrightarrow T^{\dagger}xT = (\mathbb{1}+ipdx'/\hbar)\,x\,(\mathbb{1}-ipdx'/\hbar)$$

$$= (\mathbb{1}+ipdx'/\hbar)(x-ixp\,dx'/\hbar) = x - ixp\,dx'/\hbar + ipx\,dx'/\hbar + O(dx'^2)$$

$$= x - idx'/\hbar\,(xp-px) = x - idx'/\hbar\,\underbrace{[x,p]}_{i\hbar} = x + dx'$$

$$\Rightarrow \langle x\rangle \longrightarrow \langle x\rangle + \langle dx'\rangle$$

خلاصه: $U(t,t_0) = e^{-iHt/\hbar}$, $|\alpha, t_0=0\rangle_H = |\alpha, t_0=0\rangle_S$

$$A^{H}(t) = U^{\dagger}_{(t)}A^{(S)}U(t)$$

$${}_S\langle\alpha,t_0;t|A^S|\alpha,t_0,t\rangle_S = \langle\alpha,t_0=0|U^{\dagger}A^SU|\alpha,t_0=0\rangle = {}_H\langle\alpha,t_0,t|A^H|\alpha,t_0,t\rangle_H$$

معادله حرکت هایزنبرگ

$$\frac{\partial A^{(S)}}{\partial t}=0 \qquad U=e^{-iHt/\hbar}$$

$$\frac{dA^{(H)}}{dt}=\frac{dU^{\dagger}}{dt}A^S U+U^{\dagger}\frac{dA^S}{dt}U+U^{\dagger}A^S\frac{dU}{dt}$$

$A^{(H)} = U^{\dagger}A^S U$, $\quad \frac{dA^S}{dt} = 0$

$\frac{dU^{\dagger}}{dt} = HU^{\dagger}/(-i\hbar) = U^{\dagger}H/(-i\hbar)$, $\quad \frac{dU}{dt} = \frac{1}{i\hbar}HU = \frac{1}{i\hbar}UH$

$$i\hbar\frac{\partial U}{\partial t}=HU$$

$$-i\hbar\frac{\partial U^{\dagger}}{\partial t}=U^{\dagger}H^{\dagger}=U^{\dagger}H$$

$$=\frac{-1}{i\hbar}HU^{\dagger}A^SU+\frac{1}{i\hbar}U^{\dagger}A^SUH=\frac{-1}{i\hbar}\left[H,U^{\dagger}A^SU\right]=\frac{-1}{i\hbar}\left[H,A^{(H)}\right]$$

$$\Rightarrow\boxed{\frac{dA^{(H)}}{dt}=\frac{1}{i\hbar}\left[A^{(H)},H\right]+\frac{\partial A^{(H)}}{\partial t}}\qquad dA/dt=\left[A,H\right]_{classic}$$

ehrenfest ذرات آزاد و قضیه ارنفست

$$\left[x_i,F(\vec{p})\right]=i\hbar\frac{\partial F}{\partial p_i}$$

$$\left[p_i,G(\vec{x})\right]=-i\hbar\partial_iG=-i\hbar\frac{\partial G}{\partial x_i}$$

$$H_{classic}=xp\longrightarrow H_{Q.M}=\hat{x}\hat{p}$$

$$=\tfrac{1}{2}(xp+px)\longrightarrow\tfrac{1}{2}(\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x})$$

مثال ۱: تحول p_i ذره آزاد

$$H=\frac{p_i^2}{2m}$$

$$\frac{dp_i}{dt}=\frac{1}{i\hbar}\left[p_i,H\right]=0\implies p_i=\text{ثابت}=p_i^{(S)}$$

تحول x_i ذره آزاد.

$$\left[A,BC\right]=\left[A,B\right]C+B\left[A,C\right]$$

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{1}{i\hbar}\left[x_i,H\right]=\frac{1}{i\hbar}\left[x_i,\frac{p_j^2}{2m}\right]=\frac{1}{2im\hbar}\left\{\underbrace{\left[x_i,p_j\right]}_{i\hbar\delta_{ij}}p_j+p_j\underbrace{\left[x_i,p_j\right]}_{i\hbar\delta_{ij}}\right\}$$

ثابت است.

$$=\frac{p_j}{m}\delta_{ij}=\frac{p_i}{m}=\frac{p_i(0)}{m}\implies x_i(t)=\frac{p_i(0)}{m}t+x_i(0)$$

$$\left[x_i(t),x_i(0)\right]=\left[\frac{p_i(0)}{m}t+x_i(0),x_i(0)\right]=\frac{t}{m}\underbrace{\left[p_i(0),x_i(0)\right]}_{-i\hbar}=\frac{-i\hbar t}{m}$$

$$\langle (\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}\left|\langle[A,B]\rangle\right|^2$$

$$A = x_i(t)\ ,\ B = x_i(0) \rightarrow \langle(\Delta x_t)^2\rangle\langle(\Delta x_0)^2\rangle \geq \frac{1}{4}\frac{\hbar^2 t^2}{m^2}$$

$$\Rightarrow \Delta x(t)\,\Delta x(0) \geq \frac{1}{2}\,\hbar t/m$$ ⇝ تابع موج فضای مکان با گذشت زمان پهن‌تر می‌شود

مثال ۲: تحول یک ذره که در پتانسیل $V(x)$ قرار گرفته است.

$$H = \frac{p_j^2}{2m} + V(x)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[p_i, H] = \frac{1}{i\hbar}\left[p_i, \frac{p_j^2}{2m} + V(x)\right] = \frac{1}{i\hbar}\left[p_i, V(x)\right] = \frac{1}{i\hbar}(-i\hbar)\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

$$= -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[x_i, \frac{p_j^2}{2m} + V(x)\right] = \frac{p_i}{m} \rightarrow \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{1}{m}\frac{dp_i}{dt} = -\frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

$$\rightarrow m\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \Rightarrow m\frac{d^2\vec{x}}{dt} = -\vec{\nabla}V$$

$${}_H\langle\alpha, t|\, m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}\,|\alpha, t\rangle_H = {}_H\langle\alpha, t|(-\vec{\nabla}V)|\alpha, t\rangle_H$$

قضیه ارنفست

$$\Rightarrow m\frac{d^2}{dt^2}\underbrace{{}_H\langle\alpha, t|\vec{x}|\alpha, t\rangle_H}_{\langle\vec{x}\rangle} = \langle-\vec{\nabla}V\rangle \Rightarrow \boxed{m\frac{d^2\langle\vec{x}\rangle}{dt^2} = -\langle\vec{\nabla}V\rangle}$$

"کت‌های پایه در تصویر هایزنبرگ و شرودینگر"

(1)

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle \qquad t=0$$

$$U^\dagger A^{(0)}\underset{\mathbb{1}=UU^\dagger}{|}a'\rangle = a' U^\dagger|a'\rangle \Rightarrow \underbrace{U^\dagger A(0)U}_{A^{(H)}}\left(U^\dagger|a'\rangle\right) = a'\left(U^\dagger|a'\rangle\right)$$

$$\boxed{U^\dagger|a'\rangle = |a', t\rangle_H}$$

$U^\dagger|a'\rangle$ ویژه‌کت عملگر $A^{(H)}$ با ویژه‌مقدار a' است.

① : $A^{(S)}|a'\rangle = a'|a'\rangle$

	Heisenberg	Shrodinger
کت‌های حالت	ثابت	$i\hbar \frac{\partial \vert\alpha,t\rangle}{\partial t} = H\vert\alpha,t\rangle$
مشاهده‌پذیرها	$A^H = U^\dagger A U$	ثابت
کت‌های پایه	$\vert a',t\rangle_H = U^\dagger\vert a'\rangle$	ثابت

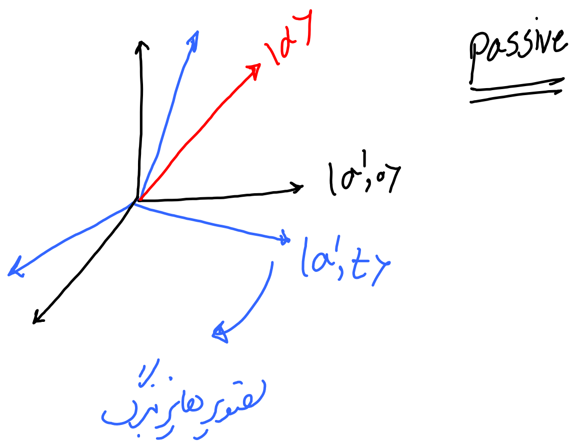
$H|a',t\rangle_H = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|a',t\rangle$

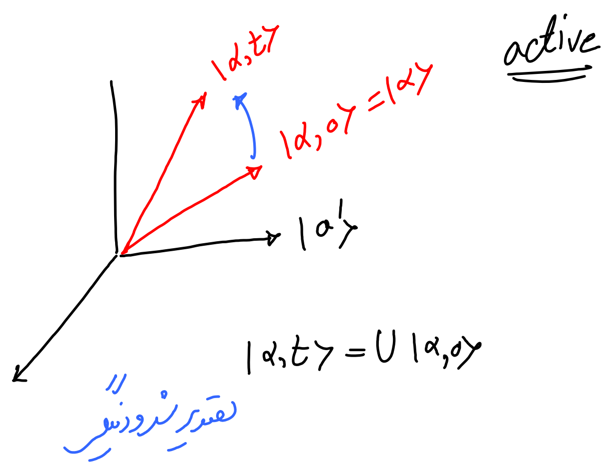
تحول زمانی کت‌های پایه:

$$|a',t\rangle_H = U^\dagger|a'\rangle \xrightarrow{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|a',t\rangle_H = \underbrace{i\hbar\frac{\partial U^\dagger}{\partial t}}_{-U^\dagger H = -HU^\dagger}|a'\rangle$$

$$HU = i\hbar\frac{\partial U}{\partial t} \xrightarrow{\dagger} U^\dagger H = -i\hbar\frac{\partial U^\dagger}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \underbrace{HU^\dagger|a'\rangle}_{|a',t\rangle_H} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|a',t\rangle_H \Rightarrow \boxed{H|a',t\rangle_H = -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|a',t\rangle_H}$$





دامنه گذار

سیستم در زمان $t=0$، در حالت $|a'\rangle$ (از مشاهده‌پذیر A) است. با چه احتمالی در زمان t به حالت $|b'\rangle$ می‌رود؟ ($|b'\rangle$ ویژه حالت اپراتور b)

تصویر شرودینگر : $|\alpha,0\rangle = |a'\rangle$

$|\alpha,t\rangle = U|\alpha,0\rangle = U|a'\rangle$

$P_{a'\to b'} = |\langle b'|\alpha\rangle|^2 = |\langle b'|U|a'\rangle|^2$

تصویر هایزنبرگ : $|\alpha,t\rangle = |\alpha,0\rangle = |a'\rangle$

کت پایه $|b'\rangle \longrightarrow |b',t\rangle = U^\dagger|b'\rangle$

$P_{a'\to b'} = |\langle b'|U|a'\rangle|^2$