جلسه پنجم

عملگر انتقال بی نهایت کوچک   خواص عملگر انتقال ← شکل عملگر انتقال و مولد انتقال

انتقال محدود   گروه های لی   روابط جابجایی کانونیک   توابع موج فضای تکانه-مکان ← مثال

$$T(d\vec{x}')|\vec{x}'\rangle = |\vec{x}'+d\vec{x}'\rangle$$

خواص عملگر انتقال:

۱) حفظ بقای احتمال:

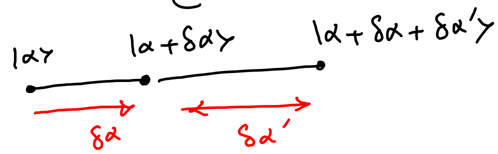
$$|\tilde{\alpha}\rangle = T|\alpha\rangle \longrightarrow \langle\tilde{\alpha}| = \langle\alpha|T^{+} \Longrightarrow \langle\tilde{\alpha}|\tilde{\alpha}\rangle = \langle\alpha|T^{+}T|\alpha\rangle \underset{\text{باید}}{=} \langle\alpha|\alpha\rangle \Longrightarrow \boxed{T^{+}T = \mathbb{1}}$$

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$$

T ue unitary

۲) انتقال در جهت های مختلف جابجا پذیر است و جمع دو انتقال یک انتقال جدید است:

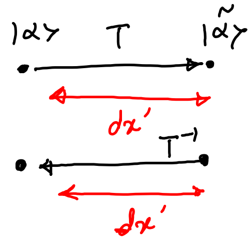
$$T(d\vec{x}')\,T(d\vec{x}'') = T(d\vec{x}'+d\vec{x}'')$$



$$|\alpha+\delta\alpha\rangle = T|\alpha\rangle$$

$$|\alpha+\delta\alpha+\delta\alpha'\rangle = T|\alpha+\delta\alpha\rangle = T^{2}|\alpha\rangle$$

۳) معکوس عملگر انتقال:



$$T^{-1}(d\vec{x}') = T(-d\vec{x}')$$

۴) وقتی $d\vec{x}' \to 0$ میرود، عملگر انتقال باید به عملگر واحد تبدیل شود:

$$\lim_{d\vec{x}'\to 0} T(d\vec{x}') = \mathbb{1}$$

شکل عملگر انتقال

$$f(\epsilon) = f(0) + \epsilon f'(0) + \frac{1}{2!}\epsilon^{2} f''(0) + \cdots$$

$$T(d\vec{x}') = T(\vec{0}) + \hat{\vec{A}}\cdot d\vec{x}' + O(d\vec{x}'^{2})$$

برای برقراری شرط 4:

$$\lim_{d\vec{x}'=0} T(d\vec{x}') = \mathbb{1} \Longrightarrow T(0) = \mathbb{1}$$

برای برقراری شرط 1:

$$T^{+} = (\mathbb{1} + \vec{A}\cdot d\vec{x}')^{+} = \mathbb{1} + \vec{A}^{+}\cdot d\vec{x}'$$

$$TT^{+} = \mathbb{1} \Longrightarrow (\mathbb{1} + \vec{A}\cdot d\vec{x}')(\mathbb{1} + \vec{A}^{+}\cdot d\vec{x}') = \mathbb{1} \Longrightarrow \cancel{\mathbb{1}} + (\vec{A} + \vec{A}^{+})\cdot d\vec{x}' + O(d\vec{x}'^{2}) = \cancel{\mathbb{1}}$$

$$\Longrightarrow A = -A^{+} \rightsquigarrow$$ اپراتور پاد هرمیتی A

تعریف می‌کنیم: $A = -iK \Longrightarrow A^{+} = +iK \xrightarrow{A^{+}=-A} K = K^{+} \rightsquigarrow$ K هرمیتی است

$$\Longrightarrow T(d\vec{x}') = \mathbb{1} - i\vec{K}\cdot d\vec{x}'$$

generator

شرط ۲:

$$T(d\vec{x}')\,T(d\vec{x}'') = (\mathbb{1} - i\vec{k}\cdot d\vec{x}')(\mathbb{1} - i\vec{k}\cdot d\vec{x}'') = \mathbb{1} - i\vec{k}\cdot(d\vec{x}' + d\vec{x}'') + \cancel{O(d\vec{x}^2)}$$

$$= T(d\vec{x}' + d\vec{x}'')$$

شرط ۳:

$$T(-d\vec{x}') = T^{-1}(d\vec{x}) \Longrightarrow TT^{-1} = \mathbb{1}$$

$$\rightarrow \overbrace{(1 - i\vec{k}\cdot(-d\vec{x}'))}^{T^{-1}}(\mathbb{1} - ik\cdot d\vec{x}') = \mathbb{1} + \cancel{ik\cdot d\vec{x}'} - \cancel{i\vec{k}\cdot d\vec{x}'} + O(\epsilon^2) = \mathbb{1}$$

خواص دیگر این عملگر

$$[\vec{x}, T(d\vec{x}')] = \vec{x}\,T(d\vec{x}') - T(d\vec{x}')\,\vec{x}$$

$$\vec{x}\,\underbrace{T(d\vec{x}')\,|\vec{x}'\rangle} = \vec{x}\,|\vec{x}' + d\vec{x}'\rangle = (\vec{x}' + d\vec{x}')\,|\vec{x}' + d\vec{x}'\rangle$$

$$T(d\vec{x}')\,\underbrace{\vec{x}\,|\vec{x}'\rangle} = T(d\vec{x}')(\vec{x}'\,|\vec{x}'\rangle) = x'\,T(d\vec{x}')\,|\vec{x}'\rangle = x'\,|\vec{x}' + d\vec{x}'\rangle$$

$$\Longrightarrow [\vec{x}, T(d\vec{x}')]\,|\vec{x}'\rangle = d\vec{x}'\,\underbrace{|\vec{x}' + d\vec{x}'\rangle}_{|\vec{x}'\rangle + \beta\, d\vec{x}' + \cdots} \simeq d\vec{x}'\,|\vec{x}'\rangle \Longrightarrow [\vec{x}, \underbrace{T(d\vec{x}')}_{\mathbb{1} - i\vec{k}\cdot d\vec{x}'}] = d\vec{x}'\,\mathbb{1}$$

$$\Longrightarrow \cancel{[\vec{x}, \mathbb{1}]} - i[\vec{x}, \vec{k}\cdot d\vec{x}'] = d\vec{x}' \Longrightarrow \vec{x}\,\vec{k}\cdot d\vec{x}' - \vec{k}\cdot d\vec{x}'\,\vec{x} = i\,d\vec{x}'$$

انتخاب

$$d\vec{x}' = \hat{e}_j\,dx' \Longrightarrow \vec{x}\,(\underbrace{\vec{k}\cdot\hat{e}_j}_{k_j}\,dx') - (\underbrace{\vec{k}\cdot e_j}_{k_j}\,dx')\,\vec{x} = i\,\hat{e}_j\,dx'$$

$$\xrightarrow{\cdot\hat{e}_i} (\underbrace{\vec{x}\cdot\hat{e}_i}_{x_i})\,k_j\,\cancel{dx'} - k_j\,\cancel{dx'}\,\underbrace{\vec{x}\cdot\hat{e}_i}_{x_i} = i\,\underbrace{\hat{e}_j\cdot\hat{e}_i}_{\delta_{ij}}\,\cancel{dx'} \longrightarrow x_i k_j - k_j x_i = i\delta_{ij}$$

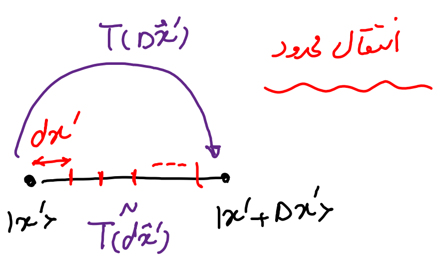
$$\Longrightarrow \boxed{[x_i, k_j] = i\delta_{ij}\,\mathbb{1}}$$

$$\text{if } i = j = x \Longrightarrow [x, k_x] = i \qquad i = x,\ j = y \rightarrow [x, k_y] = 0$$

در مکانیک کلاسیک، مومنتوم (تکانه خطی) مولد انتقال در مکان است پس k که مولد انتقال در کوانتوم است باید به p ربط داشته باشد

$$T(d\vec{x}') = \mathbb{1} - i\underbrace{\vec{k}}_{\vec{p}/\hbar}\cdot d\vec{x}' \Longrightarrow [x_i, p_j/\hbar] = i\delta_{ij} \Longrightarrow [x_i, p_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$$

$$T(\vec{Dx}') = T(Dx'\hat{x}) \rightsquigarrow T(D\vec{x}')\,|\vec{x}'\rangle = |\vec{x}' + D\vec{x}'\rangle$$



$$d\vec{x}' = \frac{D\vec{x}'}{n},\ n \to \infty$$: بازه Dx' را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم

$$T(\Delta\vec{x}') = \left(T(d\vec{x}')\right)^N = \left(1 - i\vec{k}\cdot\frac{\Delta\vec{x}'}{N}\right)^N = 1 + \cancel{N}\left(-i\vec{k}\cdot\frac{\Delta\vec{x}'}{\cancel{N}}\right) + \frac{1}{2!}\cancel{N}\underbrace{\cancel{(N-1)}}_{\simeq N}\left(-i\vec{k}\cdot\frac{\Delta\vec{x}'}{\cancel{N}}\right)^2 + \cdots$$

$$(a+b)^N = a^N + \binom{N}{1}a^{N-1}b + \binom{N}{2}a^{N-2}b^2 + \cdots$$

$$= 1 - i\vec{k}\cdot\Delta\vec{x}' + \frac{1}{2!}\left(-i\vec{k}\cdot\Delta\vec{x}'\right)^2 + \cdots = \exp\left(-i\vec{k}\cdot\Delta\vec{x}'\right)$$

$$\longrightarrow \boxed{T(\vec{a}) = e^{-i\vec{P}\cdot\vec{a}/\hbar}}$$

گروههای لی   lie groups

گروه مجموعه‌ای G از اعضاء است که با یک عمل • خواص زیر را دارا هستند:

1) closure : $\forall g, g' \in G : g\cdot g' \in G$

2) associativity: $\forall g, g', g'' \in G : g\cdot(g'\cdot g'') = (g\cdot g')\cdot g''$

3) Identity element: $\exists e \in G, \forall g \in G : e\cdot g = g\cdot e = g$

4) Inverse element : $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G : g\cdot g^{-1} = g^{-1}\cdot g = e$

---

5) commutativity : $\forall g, g' \in G : g\cdot g' = g'\cdot g$ ⟶ گروه آبلی است (Abelian group)

اگر اعضای گروه جابجا نشوند، گروه غیرآبلی است.

گروههای لی دارای بی‌نهایت عضو هستند که به صورت پیوسته از عنصر واحد بدست می‌آیند.

هر گروه دارای یک سری مولد است که همه اعضای گروه با استفاده از آن تولید می‌شوند.

هر عضو گروه لی : $a(\vec{\theta}) = \exp(i\vec{\theta}\cdot\vec{J})$

مولد عمل

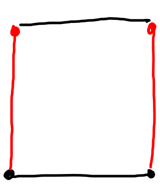
ضریب ساختار

$$[J_i, J_j] = f_{ijk}J_k$$

گروه انتقال بررسی شده است:

$$a(D_1, D_2, D_3) = e^{-i\vec{D}\cdot\vec{P}/\hbar}$$

ضریب ساختار گروه انتقال چیست؟



$D y'\hat{y}$

$D x'\hat{x}$

$$\left[T(Dx'\hat{x}), T(Dy'\hat{y})\right] = 0$$

$$\Rightarrow \left[1 - i\frac{Dx'P_x}{\hbar} + \frac{1}{2!}\cancel{\left(\frac{-iDx'P_x}{\hbar}\right)^2} + \cdots, 1 - \frac{iDy'P_y}{\hbar} + \frac{1}{2!}\cancel{\left(\frac{-iDy'P_y}{\hbar}\right)^2} + \cdots\right]$$

$$= \frac{-iDx'}{\hbar}\times(-iDy'/\hbar)\,[P_x, P_y] = 0 \Longrightarrow [P_x, P_y] = 0 \Longrightarrow [P_i, P_j] = 0$$

گروه انتقال ⟶ یک گروه آبلی است.

$\hat{P}_x$ و $\hat{P}_y$ و $\hat{P}_z$ ویژه‌کت مشترک دارند: $|\vec{P}'\rangle = |P_x', P_y', P_z'\rangle$

$$P_x|\vec{p}\,'\rangle = p_x'|\vec{p}\,'\rangle$$
$$P_y|\vec{p}\,'\rangle = p_y'|\vec{p}\,'\rangle$$

$$T(d\vec{x}\,')|\vec{p}\,'\rangle = \left(1 - i\vec{P}\cdot d\vec{x}\,'/\hbar\right)|\vec{p}\,'\rangle$$
$$= |\vec{p}\,'\rangle - i\,\vec{p}\,'\cdot d\vec{x}\,'/\hbar\,|\vec{p}\,'\rangle = \Big(1 - \underbrace{\frac{i\vec{p}\,'\cdot d\vec{x}\,'}{\hbar}}\Big)|\vec{p}\,'\rangle$$

$$T(d\vec{x}\,')|\vec{x}\,'\rangle = |\vec{x}\,' + d\vec{x}\,'\rangle \qquad |\vec{p}\,'\rangle \text{ ویژه‌کت عملگر انتقال است.}$$

$$[\vec{P}, T(d\vec{x}\,')] = 0$$

روابط جابجایی کانونیک

$$[A(\vec{q},\vec{p}), B(\vec{q},\vec{p})]_{classic} \equiv \sum_k \frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q_k}$$

مکان — تکانه

$$[\underset{=q_i}{x_i}, \underset{=p_j}{p_j}]_{classic} = \sum_k \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_k}}_{\delta_{ik}}\underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{\delta_{jk}} - \cancel{\frac{\partial x_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_j}{\partial x_k}} = \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{ij}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{[x, p_x]_{classic} = 1}$$

اصل تناظر دیراک : $[\ ,\ ]_{classic} \longrightarrow \dfrac{[\ ,\ ]}{i\hbar}$

$$\frac{[\hat{x}, \hat{p}_x]}{i\hbar} = 1 \Longrightarrow [\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$$

تابع موج فضای مکان

$$|\alpha\rangle = \int |\xi\rangle\underbrace{\langle\xi|\alpha\rangle}_{\text{ضریب بسط}} d\xi \quad \longleftrightarrow \quad |\alpha\rangle = \sum |a'\rangle\underbrace{\langle a'|\alpha\rangle}_{C_{a'}}$$

$$\xi = x' \Longrightarrow |\alpha\rangle = \int |x'\rangle\underbrace{\langle x'|\alpha\rangle}\, dx'$$

$\psi_\alpha(x')$: تابع موج حالت α

$$\underset{\Uparrow}{\langle\beta|\alpha\rangle} = \int \underbrace{\overbrace{\langle\beta|x'\rangle}^{\langle x'|\beta\rangle^*}}_{\psi^*_\beta(x')}\underbrace{\langle x'|\alpha\rangle}_{\psi_\alpha(x')} dx' = \int \psi^*_\beta(x')\,\psi_\alpha(x')\,dx'$$

$$|\alpha\rangle = \sum |a'\rangle\underbrace{\langle a'|\alpha\rangle}_{C_{a'}} \xrightarrow{\text{فضای مکان}} \underbrace{\langle x'|\alpha\rangle}_{\psi_\alpha(x')} = \sum_{a'} \underbrace{\langle x'|a'\rangle}\overbrace{\langle a'|\alpha\rangle}^{C_{a'}}$$

$u_{a'}(x')$: ویژه تابع متناظر با ویژه مقدار a'

$$\Longrightarrow \psi_\alpha(x') = \sum u_{a'}(x')\,C_{a'}$$

عملگر تکانه در پایه مکان

$$T(\Delta x'')|\alpha\rangle = \left(1 - iP/\hbar\,\Delta x''\right)|\alpha\rangle$$

$$R.H.S = |\alpha\rangle - i\,\Delta x''/\hbar\; P|\alpha\rangle$$

$$L.H.S = T\int |x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle\, dx' = \int |x' + \Delta x''\rangle\langle x'|\alpha\rangle\, dx'$$

$$x' + \Delta x'' = y \longrightarrow dx' = dy \longrightarrow \int |y\rangle\langle y - \Delta x''|\alpha\rangle\, dy$$

$$\downarrow$$

$$x' = y - \Delta x''$$

$$\langle y|\alpha\rangle - \frac{\partial}{\partial y}\langle y|\alpha\rangle \Delta x'' + \cdots$$

$$\Longrightarrow \text{L.H.S} = \underbrace{\int |y\rangle\langle y|\alpha\rangle\, dy}_{|\alpha\rangle} - \int |y\rangle \frac{\partial}{\partial y}\langle y|\alpha\rangle \Delta x''\, dy + \cdots$$

از تغییر متغیر y به x' است

$$\text{R.H.S} = \text{L.H.S} \Longrightarrow \frac{i}{\hbar} P|\alpha\rangle = \int |y\rangle \frac{\partial}{\partial y}\langle y|\alpha\rangle\, dy$$

$$\Longrightarrow P|\alpha\rangle = \frac{\hbar}{i}\int |y\rangle \frac{\partial}{\partial y}\langle y|\alpha\rangle\, dy = \frac{\hbar}{i}\int |x'\rangle \frac{\partial}{\partial x'}\langle x'|\alpha\rangle\, dx' \quad (1)$$

$$\xrightarrow{\times\langle\beta|} \langle\beta|P|\alpha\rangle = \frac{\hbar}{i}\int \underbrace{\langle\beta|x'\rangle}_{\psi^*_\beta(x')} \frac{\partial}{\partial x'} \underbrace{\langle x'|\alpha\rangle}_{\psi_\alpha(x')}\, dx' \Longrightarrow \boxed{P = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x'}}$$

$$(1) \xrightarrow{\times\langle x''|} \langle x''|P|\alpha\rangle = \frac{\hbar}{i}\int \underbrace{\langle x''|x'\rangle}_{\delta(x'-x'')} \frac{\partial}{\partial x'}\langle x'|\alpha\rangle\, dx' = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x''}\langle x''|\alpha\rangle$$

$$|\alpha\rangle = |x'\rangle \Longrightarrow \langle x''|P|x'\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x''}\langle x''|x'\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x''}\delta(x'-x'')$$

$$\langle x''|P^n|x'\rangle = \left(\frac{\hbar}{i}\,\partial/\partial x'\right)^n \delta(x'-x'')$$

هرمیتی است

$$P|p'\rangle = p'|p'\rangle \qquad |\alpha\rangle = \int |p'\rangle\underbrace{\langle p'|\alpha\rangle}_{\phi_\alpha(p')}\, dp'$$

تابع موج فضای تکانه

$$\langle p'|p''\rangle = \delta(p'-p'')$$

احتمال یافتن سیستم با تکانه بین p' و $p'+dp'$: $|\phi_\alpha(p')|^2 dp'$

سؤال : $\langle x'|p'\rangle$ چیست ؟

۱) تابع موج ذره‌ای است با تکانه p' در فضای مکان یعنی از نوع $\psi_\alpha(x')$ است که $\alpha = p'$

۲) 〃 〃 〃 با مکان x' 〃 〃 تکانه 〃 〃 $\phi^*_\alpha(p')$ است که $\alpha = x'$ $\qquad \langle x'|p'\rangle = \langle p'|x'\rangle^*$

۳) از تغییر پایه استفاده می‌کنیم :

$$U|a'\rangle = |b'\rangle \longrightarrow \langle a'|U|a'\rangle = \langle a'|b'\rangle$$ عناصر ماتریس تبدیل

$$|a'\rangle = |x'\rangle, \quad |b'\rangle = |p'\rangle \Longrightarrow \langle a'|b'\rangle = \langle x'|p'\rangle :$$

عناصر ماتریس تبدیل از فضای
مکان به فضای تکانه

بدست آوردن $\langle x'|p'\rangle$

$$P|\alpha\rangle = \int dx' |x'\rangle \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x'}\right)\langle x'|\alpha\rangle$$

$$\xrightarrow{\langle x''|} \langle x''|P|\alpha\rangle = \int dx' \underbrace{\langle x''|x'\rangle}_{\delta(x'-x'')} \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x'}\right)\langle x'|\alpha\rangle$$

$$|\alpha\rangle = |p'\rangle \Longrightarrow \langle x''|\underbrace{P|p'\rangle}_{p'|p'\rangle} = \int dx'\, \delta(x'-x'')\, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x'}\langle x'|p'\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x''}\langle x''|p'\rangle$$

$$\Longrightarrow p'\langle x'|p'\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x'}\langle x'|p'\rangle \qquad \langle x'|p'\rangle = U_{p'}(x')$$

$$\Longrightarrow \frac{ip'}{\hbar}U_{p'}(x') = \frac{d}{dx'}U_{p'}(x') \Longrightarrow \frac{dU_{p'}(x')}{U_{p'}(x')} = \frac{ip'}{\hbar}dx'$$

$$\Longrightarrow \ln U_{p'}(x') = \frac{ip'}{\hbar}x' \Longrightarrow U_{p'}(x') = N e^{ip'x'/\hbar}$$

پیدا کردن ثابت N

$$\langle x'|x''\rangle = \boxed{\delta(x'-x'') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\underbrace{k}_{p'/\hbar}(x'-x'')}\, d\underbrace{k}_{p'/\hbar}}$$

$$\Longrightarrow \langle x'|x''\rangle = \int \underbrace{\langle x'|p'\rangle}_{Ne^{ip'x'/\hbar}}\underbrace{\langle p'|x''\rangle}_{Ne^{-ip'x''/\hbar}}\, dp' = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip'(x'-x'')/\hbar}\, dp'$$

$$\Longrightarrow N^2\int e^{ip'(x'-x'')/\hbar}\, dp' = \frac{1}{2\pi\hbar}\int e^{ip'(x'-x'')}\, dp' \Longrightarrow N = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\langle x'|p'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{ip'x'/\hbar}}$$

$$\psi_\alpha(x') = \langle x'|\alpha\rangle = \int dp'\, \langle x'|p'\rangle\langle p'|\alpha\rangle = \int dp'\, \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{ip'x'/\hbar}\, \phi_\alpha(p')$$

$$\phi_\alpha(p') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dx'\, e^{-ip'x'/\hbar}\, \psi_\alpha(x')$$