حل هفتم

۱) یک ذره توسط تابع موج نرمالیزه مقابل توصیف می‌شود:
$$\psi(x) = (\pi/a)^{-1/4} e^{-ax^2/2}$$

رابطه عدم قطعیت $\Delta x \Delta p$ را بیابید.

یادآوری: $\Delta A \equiv \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2}$ ، $\langle A\rangle = \underline{\langle\psi|A|\psi\rangle}$

ψ نرم $=1$

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

$$\langle x\rangle = \langle\psi|X|\psi\rangle = \int \langle\psi|x\rangle\langle x|\underbrace{X|x'\rangle}_{x'|x'\rangle}\underbrace{\langle x'|\psi\rangle}_{\psi(x')} dx' dx =$$

$$\langle x|\psi\rangle^* = \psi^*(x)$$

$$\int \delta(x-x_0) f(x) dx = f(x_0)$$

$$\int \psi^*(x') x' \underbrace{\langle x|x'\rangle}_{\delta(x-x')} \psi(x') dx\, dx' = \int \psi^*(x) x\, \psi(x) dx$$

$$\langle\varphi|f(X)|\psi\rangle = \int \varphi^*(x) f(x)\psi(x) dx$$

$$\langle x\rangle = (\pi/a)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2/2} x\, e^{-ax^2/2} dx = (\pi/a)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx = 0$$

$$\langle x^2\rangle = (\pi/a)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2/2} x^2 e^{-ax^2/2} dx = (\pi/a)^{-1/2}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx}$$

$$2\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{2\Gamma(1/2)}{2a^{3/2}} \qquad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2$$

$$\Rightarrow \langle x^2\rangle = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \times \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}\,a} = \frac{1}{2a}$$

$$\Rightarrow \Delta x = \sqrt{(1/2a) - 0} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle\hat p^2\rangle - \langle\hat p\rangle^2}$$

روش اول: $\psi(x)$ را به فضای تکانه ببریم. یعنی تبدیل فوریه بزنیم.

$$\Psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int e^{-ipx/\hbar}\psi(x) dx$$

$$\langle\hat p\rangle = \int \Psi^*(p)\, p\, \Psi(p) dp$$

روش دوم: اپراتور $\hat p$ را به فضای مکان می‌بریم

$$\langle\hat p\rangle = \langle\psi|\hat p|\psi\rangle = \int \psi^*(x)\, \underbrace{\hat p}_{\frac{\hbar}{i}\partial/\partial x}\, \psi(x) dx$$

$$\partial/\partial x\, \psi(x) = (\pi/a)^{-1/4}(-ax)\, e^{-ax^2/2} \quad ①$$

$$\Rightarrow \langle \hat{p} \rangle = (\pi/a)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2/2}(-ax)\, e^{-ax^2/2} \times \hbar/i\, dx = -a\hbar/i\,(\pi/a)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-ax^2}dx = 0$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \int \psi^*(x)\, \hat{p}^2 \psi(x)\, dx \qquad p^2 = -\hbar^2\, \partial^2/\partial x^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) \overset{①}{=} (\pi/a)^{-1/4}\left\{-a + a^2x^2\right\} e^{-ax^2/2}$$

$$\Rightarrow \langle \hat{p}^2 \rangle = -\hbar^2 (\pi/a)^{-1/2}\int e^{-ax^2/2}\left\{-a + a^2x^2\right\} e^{-ax^2/2}\, dx$$

$$= -\hbar^2 \cancel{\sqrt{\frac{a}{\pi}}}\,(-a)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx}_{\cancel{\sqrt{\pi/a}}} - \hbar^2 \cancel{\sqrt{\frac{a}{\pi}}}\, a^{\cancel{2}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2}dx}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} = \frac{\cancel{\sqrt{\pi}}}{2\cancel{\sqrt{a}}\,\cancel{a}}} = \hbar^2 a - \frac{\hbar^2 a}{2} = \frac{a\hbar^2}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta p = \sqrt{\frac{a\hbar^2}{2} - 0} = \frac{\sqrt{a}\,\hbar}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \Delta x \Delta p = \frac{1}{\sqrt{2\cancel{a}}} \times \frac{\sqrt{\cancel{a}}\,\hbar}{\sqrt{2}} = \hbar/2$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

۲) هامیلتونی به شکل مقابل مفروض است:

الف- ویژه مقادیر و ویژه کت‌های این هامیلتونی را بیابید.

ب- اگر یک ذره در حالت $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} i \\ -i \\ i \end{pmatrix}$ باشد، ΔH را بیابید.

الف

$$\det|H - \lambda \mathbb{1}| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{طرفین: } (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (3-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow \lambda = 3\ ,\ (2-\lambda)^2 = 1 \Rightarrow 2-\lambda = \mp 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = 1 \\ 2-\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = 3 \end{cases} \qquad E_1 = 1 \quad , \quad E_2 = E_3 = 3$$

سیستم دارای تبهگنی دوگانه است.

$$E_1 = 1 \rightarrow |E_1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$H|E_1\rangle = \overset{=1}{E_1}|E_1\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = \alpha \\ \alpha + 2\beta = \beta \\ 3\gamma = \gamma \Rightarrow \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = -\beta = 1$$

$$\Rightarrow |E_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $E_2 = 3 \Rightarrow |E_2\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

$$H|E_2\rangle = \overset{=3}{E_2}|E_2\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 3\alpha \\ \alpha + 2\beta = 3\beta \\ 3\gamma = 3\gamma \rightarrow \gamma = 1 \end{cases}$$

$$\alpha = \beta = 0$$

$$\Rightarrow |E_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• پیدا کردن بردار سوم:

$$|E_2'\rangle = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(-1) - \hat{j}(1) + \hat{k}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta H = \sqrt{\langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2}$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} i \\ -i \\ i \end{pmatrix}$$

$$\langle\psi| = \frac{1}{\sqrt{3}}(-i \quad +i \quad -i)$$

$$\langle H\rangle = \langle\psi|H|\psi\rangle =$$

$$\frac{1}{3}(-i \quad i \quad -i)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ -i \\ i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}(-i \quad i \quad -i)\begin{pmatrix} 2i - i \\ i - 2i \\ 3i \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(-i \quad i \quad -i)\begin{pmatrix} i \\ -i \\ 3i \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(+1 + 1 + 3) = \frac{5}{3}$$

$$H^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \langle H^2 \rangle = \langle \psi | H^2 | \psi \rangle = 1/3 \begin{pmatrix} -i & i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -i \\ i \end{pmatrix}$$

$$= 1/3 \begin{pmatrix} -i & i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5i - 4i = i \\ 4i - 5i = -i \\ 9i \end{pmatrix} = 1/3 \left(+1 + 1 + 9 \right) = 11/3$$

$$\Rightarrow \Delta H = \sqrt{11/3 - (5/3)^2} = \cdots$$

۳) عملگرهای O_1 و O_2 بصورت مقابل داده شده‌اند:

$$O_1 \psi(x) = x^3 \psi(x)$$

$$O_2 \psi(x) = x \, d\psi/dx$$

$[O_1, O_2]$ را بیابید.

وقتی شکل اپراتوری عملگرها داده شده است ، باید حتماً بر روی یک تابع اثر کند.

$$[O_1, O_2]\psi(x) = O_1 O_2 \psi(x) - O_2 O_1 \psi(x)$$

$$O_1 O_2 \psi(x) = O_1 (x \, d\psi/dx) = x^3 \times x \frac{d\psi}{dx} = x^4 \, d\psi/dx$$

$$O_2 O_1 \psi(x) = O_2 (x^3 \psi(x)) = x \, d/dx \left(x^3 \psi(x) \right) = x \left\{ 3x^2 \psi(x) + x^3 \, d\psi/dx \right\}$$

$$\Rightarrow [O_1, O_2]\psi(x) = -3x^3 \psi(x) \quad \Rightarrow \quad [O_1, O_2] = -3x^3$$

۴) هامیلتونی یک سیستم بصورت مقابل است:

$$\hat{H} = \hat{p}^2/2m + V(\hat{x})$$

$[H, X]$ را بیابید.

$$[H, X] = \left[\frac{p^2}{2m} + V(x), X \right] = \left[\frac{p^2}{2m}, X \right] + \cancel{[V(X), X]}_{0}$$

$$= \frac{1}{2m} [p^2, X] = 1/2m \left(p \underbrace{[p, X]}_{-i\hbar} + \underbrace{[p, X]}_{-i\hbar} p \right) = \frac{-i\hbar p}{m}$$

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

۵) کمیت کلاسیک $f(x,p)$ مفروض است. در این تابع، جمله xp وجود دارد. عملگر متناظر با آن در Q.M. چیست؟

$$f(x,p) = xp \overset{= \frac{1}{2}(xp+px)}{\longrightarrow} f(X,P) = XP \quad ?$$

تمام مشاهده‌پذیرها عملگرهای هرمیتی هستند $\quad f^{\dagger} = f \quad \Longrightarrow \quad (XP)^{\dagger} = P^{\dagger}X^{\dagger} = PX \neq XP$

$$f(x,p) = \frac{1}{2}(xp+px) \longrightarrow f(X,P) = \frac{1}{2}(XP+PX)$$

۶) هامیلتونی مقابل مفروض است:

$$H = \alpha\left(|\varphi_1\rangle\langle\varphi_2| + |\varphi_2\rangle\langle\varphi_1|\right)$$

که α عددی حقیقی با ابعاد انرژی است و $|\varphi_1\rangle$ و $|\varphi_2\rangle$ ویژه‌کت‌های بهنجار عملگر هرمیتی A هستند.

الف- آیا H یک عملگر تصویر است؟ ب- نشان دهید که $|\varphi_1\rangle$ و $|\varphi_2\rangle$ ویژه‌کت‌های H نیستند. ج- ویژه‌کت‌های H را بیابید و نمایش ماتریسی H در پایه‌های A را بنویسید.

• $H^{\dagger} = H \longrightarrow H^{\dagger} = \alpha^{\cancel{*}}\left(|\varphi_2\rangle\langle\varphi_1| + |\varphi_1\rangle\langle\varphi_2|\right) = H$

• $H^2 = H \longrightarrow H^2 = \alpha^2\left(|\varphi_1\rangle\langle\varphi_2| + |\varphi_2\rangle\langle\varphi_1|\right)\left(|\varphi_1\rangle\langle\varphi_2| + |\varphi_2\rangle\langle\varphi_1|\right)$

$$= \alpha^2\left\{|\varphi_1\rangle\underbrace{\langle\varphi_2|\varphi_1\rangle}_{0}\langle\varphi_2| + |\varphi_1\rangle\underbrace{\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle}_{1}\langle\varphi_1| + |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2| + 0\right\}$$

$$\Longrightarrow H^2 = \alpha^2\left\{|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| + |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|\right\} \neq H \quad \rightsquigarrow \quad$$ H عملگر تصویر نیست

ب-

$$H|\varphi_1\rangle = \alpha\left\{|\varphi_1\rangle\langle\varphi_2| + |\varphi_2\rangle\langle\varphi_1|\right\}|\varphi_1\rangle = \alpha|\varphi_2\rangle\overbrace{\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle}^{1} = \alpha|\varphi_2\rangle$$

$$H|\varphi_2\rangle = \alpha|\varphi_1\rangle$$

$|\varphi_i\rangle$ها ویژه‌کت‌های H نیستند.

ج- $|\psi\rangle$ ویژه‌کت H است.

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

$|\psi\rangle$ را می‌توان برحسب پایه‌های کامل بسط داد. ⟵

$$|\psi\rangle = a|\varphi_1\rangle + b|\varphi_2\rangle$$

$$a^2+b^2=1$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \Longrightarrow \left(a^*\langle\varphi_1| + b^*\langle\varphi_2|\right)\left(a|\varphi_1\rangle + b|\varphi_2\rangle\right) = 1 \Longrightarrow aa^* + bb^* = 1 \quad (\mathrm{I})$$

$$H|\psi\rangle = \alpha\left\{|\varphi_1\rangle\langle\varphi_2| + |\varphi_2\rangle\langle\varphi_1|\right\}\left\{a|\varphi_1\rangle + b|\varphi_2\rangle\right\} = E\left\{a|\varphi_1\rangle + b|\varphi_2\rangle\right\}$$

$$\Rightarrow \left(\alpha b|\varphi_1\rangle + \alpha a|\varphi_2\rangle\right) = E\left(a|\varphi_1\rangle + b|\varphi_2\rangle\right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha b = aE & \mathrm{II} \\ \alpha a = bE \end{cases} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 \quad \Rightarrow \quad a = \mp b \overset{(\mathrm{I})}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow |\psi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\varphi_1\rangle \pm |\varphi_2\rangle\right)$$

$$\mathrm{II}: \quad a = b \rightsquigarrow E = +\alpha$$

$$\quad\;\; a = -b \rightsquigarrow E = -\alpha$$

$$H^{\psi\ \text{در پایه}} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

نمایش ماتریسی H در پایه‌های $|\varphi_i\rangle$:

$$H = \alpha\left(|\varphi_1\rangle\langle\varphi_2| + |\varphi_2\rangle\langle\varphi_1|\right)$$

$$H_{11} = \langle\varphi_1|H|\varphi_1\rangle = \langle\varphi_1|\left\{\alpha|\varphi_1\rangle\langle\varphi_2| + \alpha|\varphi_2\rangle\langle\varphi_1|\right\}|\varphi_1\rangle$$

$$= \alpha\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle\underbrace{\langle\varphi_2|\varphi_1\rangle}_{0} + \alpha\underbrace{\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle}_{0}\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle = 0 \qquad , H_{22} = 0$$

$$H_{12} = \langle\varphi_1|H|\varphi_2\rangle = \alpha\underbrace{\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle}_{1}\underbrace{\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle}_{1} + \alpha\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle\underbrace{\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle}_{0} = \alpha \quad , H_{21} = \alpha$$

$$\Rightarrow H^{(\varphi)} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

۷) ذره‌ای در امتداد محور x حرکت می‌کند و دارای هامیلتونی مقابل است:

$$H = -\epsilon\, \frac{d^2}{dx^2} + 16\epsilon x^2$$

الف - آیا تابع $\psi(x) = Ae^{-2x^2}$ یک ویژه تابع H است؟

ب - A را بدست آورید.

ج - احتمال یافتن ذره در جایی در امتداد منفی محور x چقدر است؟

ج - پاریته $\psi(x)$ چیست؟

الف

$H\psi(x) \overset{?}{=} a\,\psi(x)$

$$H\psi(x) = \left(-\epsilon \frac{d^2}{dx^2} + 16\epsilon x^2\right) A e^{-2x^2} = \left(\cancel{-16\epsilon x^2} + 4\epsilon + \cancel{16\epsilon x^2}\right) A e^{-2x^2} = \underbrace{4\epsilon}_{\text{ویژه مقدار}}\,\psi(x)$$

$$\frac{d}{dx} e^{-2x^2} = -4x e^{-2x^2} \qquad \frac{d^2}{dx^2} e^{-2x^2} = \frac{d}{dx}\left(-4x e^{-2x^2}\right) = 16x^2 e^{-2x^2} - 4e^{-2x^2}$$

$\psi(x)$ ویژه تابع H با ویژه مقدار 4ϵ است.

ب

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\psi(x)\,dx = 1 \Longrightarrow A^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4x^2}\,dx}_{\sqrt{\pi}/2} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\pi/a}$$

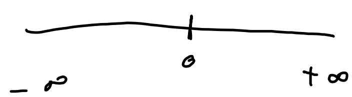
$$\Longrightarrow A^2 = \frac{2}{\pi^{1/2}} \Longrightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}}$$

ج

$|\psi|^2 dx$: احتمال این که ذره بین x و $x+dx$ یافت شود.

$$P = \int_{-\infty}^{0} |\psi|^2 dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{2}{\pi^{1/2}} e^{-4x^2}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi^{1/2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{0} e^{-4x^2}\,dx}_{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}} = \frac{2}{\pi^{1/2}} \times \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}$$



$$\Pi\psi(x) = \psi(-x) \longleftarrow \psi(x) = A e^{-2x^2}$$

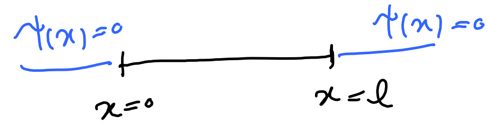
$\psi(-x) = A e^{-2x^2} = \psi(x) \rightsquigarrow$ پاریته زوج است

در حالت کلی : $\Pi\psi(x) = \psi(-x) = \pm\psi(x)$

۸) عملگر $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ مفروض است. اگر ذره محدود به حرکت بین $x=0$ و $x=l$ به صورت آزادانه باشد، ویژه توابع و ویژه مقادیر این عملگر را بیابید.

$$A\psi(x) = a^2\psi(x) \Longrightarrow -\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = a^2\psi(x)$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = -a^2\psi(x) \Longrightarrow \psi(x) = e^{iax} \text{ یا } e^{-iax}$$



$$\psi(x) = \alpha e^{iax} + \overset{-\alpha}{\beta} e^{-iax} \quad *$$

$$\psi(x=0)=0 \Rightarrow \alpha+\beta=0 \Rightarrow \alpha=-\beta$$

$$\psi(x=l)=0 \Rightarrow \alpha e^{ial} + \overset{-\alpha}{\beta} e^{-ial} = 0 \Rightarrow e^{ial} - e^{-ial} = 0 \Rightarrow 2i\sin al = 0$$

$$\Rightarrow al = n\pi \Rightarrow a = \frac{n\pi}{l} \overset{*}{\Rightarrow} \psi(x) = \alpha\left\{ e^{in\pi x/l} - e^{-in\pi x/l} \right\}$$

$$\Rightarrow \psi(x) = 2i\alpha \sin\frac{n\pi x}{l}$$

۹) یک سیستم فیزیکی دوبعدی داریم. کت‌های $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle$ یک پایه متعامد از فضا را تشکیل می‌دهند. پایه‌های جدید را به این شکل می‌سازیم:

$$|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle\right) \quad *'$$

$$|\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle\right)$$

الف- اگر عملگر A در پایه $|\psi\rangle$ به صورت $A = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}$ باشد، این عملگر در پایه $|\varphi\rangle$ چگونه است؟

ب- کت $|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ تحت تبدیل پایه چگونه عوض می‌شود؟

$$|\varphi_n\rangle \xrightarrow{U} |\varphi'_n\rangle \quad , \quad U_{mn} = \langle \varphi'_m | \varphi_n \rangle$$

$$A' = U^{\dagger} A U$$

$$|\psi_i\rangle \xrightarrow{U} |\varphi_i\rangle \quad , \quad U_{ij} = \langle \varphi_i | \psi_j \rangle \Rightarrow A^{(\varphi)} = U^{\dagger} A^{(\psi)} U$$

$$U_{11} = \langle \varphi_1 | \psi_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{ \langle \psi_1 | + \langle \psi_2 | \right\} |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \overbrace{\langle \psi_1 | \psi_1 \rangle}^{1} + \underbrace{\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle}_{0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$U_{21} = \langle \varphi_2 | \psi_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{ \langle \psi_1 | - \langle \psi_2 | \right\} |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} = U_{12}$$

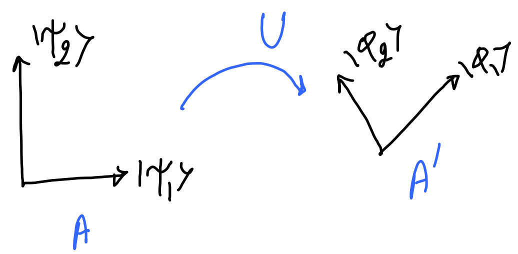
$$U_{22} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$U^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(\varphi)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \epsilon\\ \epsilon & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\epsilon & 1-\epsilon\\ \epsilon+1 & \epsilon-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\epsilon+2 & 0\\ 0 & 2-2\epsilon\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{(\varphi)} = \begin{pmatrix}\epsilon+1 & 0\\ 0 & 1-\epsilon\end{pmatrix} \Longrightarrow$$ $|\varphi_i\rangle$ ها پایه‌های A هستند

مثال: $|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_1\rangle + i|\psi_2\rangle\right)$ در پایه‌های $|\psi\rangle$ نوشته شده



یادآوری:

$$\begin{pmatrix}\langle\varphi_1'|\psi\rangle\\ \langle\varphi_2'|\psi\rangle\\ \vdots\end{pmatrix} = U^{\dagger}\begin{pmatrix}\langle\varphi_1|\psi\rangle\\ \langle\varphi_2|\psi\rangle\\ \vdots\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\langle\varphi_1|\alpha\rangle\\ \langle\varphi_2|\alpha\rangle\end{pmatrix} = U^{\dagger}\begin{pmatrix}\langle\psi_1|\alpha\rangle\\ \langle\psi_2|\alpha\rangle\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ i/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+i\\ 1-i\end{pmatrix}$$

۱۰) در تمرین قبل، نمایش $e^A|\psi_1\rangle$ را بیابید.

$$A^{(\psi)} = \begin{pmatrix}1 & \epsilon\\ \epsilon & 1\end{pmatrix} \longrightarrow A^{(\varphi)} = \begin{pmatrix}1+\epsilon & 0\\ 0 & 1-\epsilon\end{pmatrix}$$

اگر تابعی از یک عملگر روی ویژه کت‌های خود عمل کند، داریم: $f(A)|a\rangle = f(a)|a\rangle$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \to e^{A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}} = \mathbb{1} + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots$$

$$A = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix} \to e^A = \mathbb{1} + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots = \begin{pmatrix}e^{\alpha} & 0\\ 0 & e^{\beta}\end{pmatrix}$$

چون عملگر A در پایه $|\varphi\rangle$ قطری است پس $\exp A$ در این پایه به صورت زیر قابل محاسبه می‌شود:

$$e^A = \begin{pmatrix}e^{\epsilon+1} & 0\\ 0 & e^{1-\epsilon}\end{pmatrix} = e^{\epsilon+1}|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| + e^{1-\epsilon}|\varphi_2\rangle\langle\varphi_2| \; * \, !$$

$$|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle\right)$$

$$|\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle\right)$$

جمع روابط:

$$|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle = \frac{\cancel{2}^{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}|\psi_1\rangle \Longrightarrow |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\underset{=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}{|\varphi_1\rangle} + \underset{=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}{|\varphi_2\rangle}\right)$$

$$e^{A}|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} e^{\epsilon+1} & 0 \\ 0 & e^{1-\epsilon} \end{pmatrix} \times 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} e^{\epsilon+1} \\ e^{1-\epsilon} \end{pmatrix} = 1/\sqrt{2} \left(e^{\epsilon+1}|\varphi_1\rangle + e^{1-\epsilon}|\varphi_2\rangle \right)$$